HACIA UNA LOGICA DE SIGNIFICACIONES

por

Jean Piaget y Rolando García

Prefacio de Bärbel Inhelder

Con la colaboración de:

L. Banks, J. Berthoud, D. de Caprona, S. Dionnet, J. Guyon, A. Henriques, V. Jacq, H. Kilcher, D. Maurice, G. Merzaghi, C. Monnier, G. Piéraut-Le Bonniec, E. Rappe du Cher, A. Ritter, A. Sinclair, C. Vachta, B. Vitale, A. Wells, M. Zinder y R. Zubel



Título del original en francés:
Vers une logique des significations

Traducción: Emilia Ferreiro

Revisión del original: María Isabel Mármora

Diseño de cubierta: Marc Valls

Segunda edición, noviembre de 1997, Barcelona

Muntaner, 460, entlo., 1.ª
Tel. 201 60 00
08006 - Barcelona, España

ISBN: 84-7432-666-4
Depósito legal: B-45.950/1997

Impreso en Liberduplex
c/ Constitució, 19, 08014 Barcelona

Impreso en España
Printed in Spain

Indice

Prefacio

Creo que el interés primordial de este libro reside en que responde, por una parte, a la preocupación que la psicología contemporánea manifiesta por la significación y por la representación, y por la otra a una renovación del interés por los problemas del pensamiento lógico contemporáneo.

Esta obra da cuenta de las investigaciones concebidas por Jean Piaget y realizadas por sus colaboradores en el Centro Internacional de Epistemología Genética (Ginebra) en 1978/79· se trata de la última obra escrita por Jean Piaget. Es no sólo la culminación de una serie de trabajos sino también una perspectiva de futuro; y representa un intentó de reformulación de la lógica operatoria prolongándola en dos direcciones: hacia la construcción de una lógica de las significaciones —cuyo desarrollo natural sería la lógica operatoria— y hacia una reformulación de la lógica proposicional que la liberaría de sus vínculos demasiado estrechos con la lógica extensional.

A este respecto, la colaboración entre Jean Piaget y Rolando García, ya fecunda en *Psicogénesis e historia de la ciencia* (1983) [1], ha mostrado todo su valor desde la concepción de las investigaciones experimentales y teóricas aquí expuestas. A través de intensos intercambios de ideas, notas y comunicaciones, los dos autores han interaccionado en todas las etapas de la elaboración del cuadro conceptual de la investigación. Mientras Piaget se orientaba cada vez más hacia una teoría de la significación en lógica natural, García la enriquecía vinculándola con las teorías lógicas contemporáneas.

La obra tiene dos partes. La primera está constituida por el texto de J. Piaget quien había esperado completarlo integrando los resul-

[1] J. Piaget y R. García, *Psychogenèse et histoire des sciences*, París, Flammarion, 1983. Hay traducción española: *Psicogénesis e historia de la ciencia*, México, Siglo XXI, 1983.

tados de la contribución de R. García. Desgraciadamente Piaget no tuvo el tiempo necesario para proceder por sí mismo a esta síntesis, que debemos ahora a R. García en las "Conclusiones generales".

El proyecto de Piaget consistía en poner en evidencia los orígenes mismos de la lógica, remontándose hasta las implicaciones entre acciones en el nivel sensoriomotriz. Tal lógica no podía ser sino una lógica de las significaciones, en la cual las implicaciones no se limitan a enunciados: cada acción u operación está cargada de significaciones por el sujeto; es entonces posible tratar los sistemas de implicaciones entre las significaciones de las acciones, antes de hacerlo con las operaciones. Si tenemos cuidado de distinguir entre la significación de las acciones y su causalidad, las expectativas y anticipaciones de los sujetos relativas al encadenamiento de las acciones testimonian ya un comienzo de inferencia. Ahora bien, la implicación entre acciones —una forma privilegiada de inferencia— consiste en una implicación entre sus significaciones. Piaget emprendía así el estudio de una "protológica", en la cual las relaciones entre formas y contenidos están menos diferenciadas que en los sistemas operatorios. Luego de las *Investigaciones sobre las Correspondencias* (1980),[2] de *Las formas elementales de la dialéctica* (1980)[3] y de *Comparar y transformar: de las estructuras a las categorías*[4] en las que había ya descrito las etapas elementales y formativas de las operaciones, Piaget siguió profundizando el estudio de los modos de comprensión que el sujeto utiliza como instrumento cognitivo mucho antes de ser capaz de tematizarlos.

La segunda parte de la obra, redactada por García, pone de relieve la contribución original de Piaget a la lógica de las significaciones, contribución que debe ser situada en el marco de la epistemología genética para comprenderla plenamente.

En el capítulo "Lógica y epistemología genética", García subraya que Piaget no pensaba hacer una contribución a la lógica sino crear un instrumento que sirviera a la epistemología. Esperamos que esto contribuya a disipar los malentendidos frecuentes relativos a ciertas formalizaciones propuestas por Piaget para analizar las normas de la razón humana en todos los niveles de su desarrollo.

Los no especialistas en lógica agradecerán al autor, al leer el capítulo "Lógica extensional y lógica intensional", el haber expuesto con gran claridad las semejanzas y las diferencias entre la lógica operatoria y la lógica de la pertinencia, familiarizándolos con la obra de Anderson y Belnap. García estima que la lógica de la

[2] J. Piaget, *Recherches sur les correspondances. Etudes d'épistémologie génétique*, v. XXXVII, París, P.U.F., 1980.

[3] J. Piaget, *Les formes élémentaires de la dialectique*, París, Gallimard, 1980.

[4] J. Piaget, G. Henriquès y E. Ascher, *Comparer et transformer: des structures aux catégories* (en prensa).

pertinencia es el sustrato indispensable de la lógica operatoria, y es el primero en haber mostrado toda la fecundidad de un estudio conjunto de esas dos lógicas.

Finalmente, en sus notables "Conclusiones generales", que aconsejaríamos al lector leer en primer término, García da una magistral interpretación del conjunto de los descubrimientos presentados en esta obra. Entre otras cosas, subraya un hecho que a primera vista pareciera contradecir nuestros resultados anteriores: la formación precoz, en el plano de la acción y en el contexto específico de las significaciones, de operaciones isomorfas a una u otra de las 16 operaciones binarias de la lógica de las proposiciones, aún no reunidas en estructuras de conjunto. Habría pues fragmentos de estructura que se coordinan progresivamente hasta la constitución de los agrupamientos y ulteriormente del grupo INRC. Señalemos a este respecto que García atribuye a los procesos de asimilación una doble dirección, atributiva e integrativa, y muestra así que una lógica de las significaciones que funda la lógica de los enunciados debe seguir la vía de una lógica a la vez intensional y extensional.

Esta obra no cierra un debate sino que abre nuevas perspectivas. No podemos sino seguir a García con su concepción de una epistemología plenamente científica y por lo tanto modificable, la única que permite tratar y renovar un problema clásico como es el de la significación. Podemos agregar a esto que el libro permite comprender mejor una lógica de las acciones y los fenómenos ligados a la atribución de las significaciones en la actividad cognitiva del niño. Amplios sectores de la psicología se preocupan hoy de las intuiciones, fines y representaciones significantes que subyacen en las conductas cognitivas. Este texto contribuirá a dicha problemática a través del acercamiento interdisciplinario, tan típico de la escuela piagetiana —que ya mostró su fecundidad en el pasado— y suscitará el interés de lógicos, epistemólogos, psicólogos y de todos los investigadores abiertos a las nuevas maneras de abordar la significación.

Queremos agradecer especialmente a nuestro colega J. B. Grize por haber tenido la amabilidad de leer las partes teóricas del manuscrito de Piaget referentes a las formulaciones lógicas. Agradecemos también especialmente a D. de Caprona por su notable traducción del inglés de la segunda parte de la obra; a E. Ferreiro y a S. Dionnet por la edición de la parte experimental, a P. Steenken por las ilustraciones y a todos los colaboradores del Centro Internacional de Epistemología Genética y de la Fundación Archives Jean Piaget. Una vez más gracias a los subsidios del Fondo Nacional Suizo de la Investigación Científica, de la Fundación Ford y de la Fundación Jean Piaget para Investigaciones Psicológicas y Epistemológicas ha sido posible el trabajo de investigación y de redacción.

Bärbel Inhelder
Ginebra, 1986

Primera parte

Jean Piaget

Introducción

El objetivo principal de esta obra es completar y corregir nuestra lógica operatoria en el sentido de una lógica de las significaciones. De hecho, ella lo es en buena parte en el sentido extensional del término, y en consecuencia queda por precisar en un sentido intensivo (en "comprensión") el empleo de los funtores lógicos "y" y "o" y sobre todo el de las implicaciones "significantes" por oposición a las implicaciones "materiales". La diferencia entre las dos consiste en que en el último caso el vínculo entre enunciados solo depende de sus respectivos valores de verdad sin ocuparse de su significación ni de la verdad de su relación. Es así como, en términos extensionales, basta con que uno de los términos de la disyunción $p.q \vee \bar{p}.q \vee \bar{p}.\bar{q}$ sea verdadero para extraer la implicación $p \supset q$, y esto incluso sin ninguna relación de significación entre p y q. Aquí se encuentra el origen de las bien conocidas paradojas. Es entonces indispensable construir una lógica de las significaciones cuya operación central será lo que llamaremos "implicación significante": p implica q (notación $p \rightarrow q$) si una significación s de q está englobada en las de p y si esta significación común s es transitiva. En ese caso los englobamientos de significaciones en comprensión, que llamaremos "inherencias", corresponden a imbricaciones en extensión, o sea a un cierto tipo de tablas de verdad, pero parciales y determinadas por las significaciones, con relativización de las negaciones con respecto a los referenciales que constituyen esas imbricaciones. [1]

Ahora bien, si hay una lógica de las significaciones, no hay razón alguna para que se limite a las proposiciones o enunciados, ya que toda acción y toda operación comportan también significaciones. Y

[1] Esto significa que puesto que la clase de cuadrados está incluida en la de los rectángulos, si p = df esta figura es un cuadrado, luego $\bar{p}$ – df esta figura no es un cuadrado no quiere decir que no se sabe qué es sino solamente que no es un rectángulo.

puesto que ninguna acción ni operación —ni, con mayor razón, ninguna significación— permanecen en estado aislado, sino que cualquiera de ellas es solidaria de muchas otras, existen entonces implicaciones entre acciones y operaciones que se refieren a sus significaciones (diferentes, aunque inseparables, de su aspecto causal o de realización material).

El segundo objetivo esencial de nuestro estudio será entonces la profundización del análisis de esas implicaciones entre acciones u operaciones, remontándonos tanto como sea posible al plano práctico y en la dirección de las inferencias más elementales. Este análisis es fácil de hacer en el nivel de las operaciones propiamente dichas (7-10 años). Por ejemplo, resulta claro que una operación que consiste en reunir objetos *x* en una clase, implica que se excluye a los *y* (no-*x*): *omnis determinatio est negatio*, como decía Spinoza. Pero cuando se trata de acciones prácticas, es preciso distinguir entre su aspecto causal (sus resultados constatables a posteriori) y su anticipación, que es inferencial. En efecto, si una acción no es en sí misma ni verdadera ni falsa, y solo se evalúa en términos de eficacia o de utilidad con respecto a un fin, la implicación entre acciones que están en juego en las anticipaciones es, por el contrario, susceptible de verdad o falsedad y, por consiguiente, ya constituye una lógica que se encuentra desde los niveles más primitivos. Debe agregarse que siendo toda significación el resultado de una asimilación del objeto considerado a un esquema del sujeto, y, recíprocamente, siendo toda asimilación fuente de significaciones, una sucesión causal de observables puede ya dar lugar a implicaciones entre significaciones. Por ejemplo, si un objeto *x* está ubicado sobre un soporte *y* que permite atraerlo hacia sí, o bien está ubicado al lado o lejos de ese soporte, habrá implicación entre significaciones si el sujeto comprende que en este segundo caso no sirve de nada el atraer *y*; la relación o acción "ubicar sobre" adquiere por este hecho la significación de una "razón".

A este respecto es posible distinguir diferentes niveles. El más elemental consiste en construir esquemas de acciones, de objetos y de relaciones en el interior de cuadros perceptivos globales que constituyen el universo del lactante. En este universo inicialmente indiferenciado cualquier cambio consiste en una sustitución de un cuadro de conjunto por otro, sin análisis del detalle de las modificaciones que puedan producirse. A partir de esta situación esencialmente sincrética, los primeros pasos cognitivos consisten en recortar en dicho cuadro un cierto número de elementos relativamente aislables y estables en función de acciones repetibles (que constituyen el comienzo de los esquemas de acciones). De ahí la formación de objetos y de relaciones a los cuales se referirán las primeras inferencias o implicaciones entre significaciones y acciones. En otros textos hemos descrito la conquista laboriosa y relativamente tardía (10-12 meses) de la permanencia de los objetos cuando son

ocultados por pantallas,[2] y numerosos trabajos (Bower,[3] etc.) han mostrado luego que esta construcción era aun más compleja que lo que habíamos descrito. Hemos tomado conocimiento de estudios[4] que describen varios otros esquemas que se elaboran hacia los 9-10 meses: en presencia de cubos vacíos de diferentes tamaños, de palitos y bolitas de plastilina, algunos sujetos manifiestan la intención de insertar un cubo pequeño en uno más grande, pero lo que es notable es que no lo hacen directamente y comienzan por poner en su boca lo que luego van a poner en un cubo. Construyen así el esquema (en este caso una relación) de contenido a continente, pero extrayéndola por una especie de "abstracción reflexiva" del esquema que venían utilizando cotidianamente desde tiempo atrás: el de "poner en la boca". Después prolongarán las acciones en nuevos esquemas o subesquemas más o menos coordinados entre sí, tales como poner dentro, luego sacar o llenar (completamente), luego vaciar o iterar la acción de poner dentro, sirviendo un cubo de "contenido" para otro, pero convirtiéndose a su vez en un "continente" para un cubo más pequeño. En resumen, las bolitas, cubos y palitos podrán servir de contenidos y los seis cubos juegan el rol de continentes. Lo mismo ocurre con bolitas de plastilina: el sujeto pegará dos o más para construir una totalidad continua, luego las separará para volverlas al estado discontinuo precedente. Otros objetos, como un palito, podrán servir para golpear, ser lanzados, empujar, etc. El interés de esos hechos consiste en la construcción de esquemas relacionales, coordinables entre sí, sobre todo en los casos en que una acción positiva (poner dentro, etc.) es seguida por su inversa (sacar, vaciar, etc.), lo que comporta un comienzo de implicaciones entre acciones, tales como "la acción *x* implica la posibilidad de ser invertida". Se notan además diferenciaciones de acciones, individualizaciones y localizaciones de objetos, aglomeraciones e individualizaciones, comienzos de clasificaciones, correspondencias, etc.

Es posible entonces calificar a este nivel inicial de "protológico", entendiendo por ello que se trata de una fase de preparación de los instrumentos de deducción propiamente dichos, tal como se manifiesta en la formación y la coordinación de los primeros esquemas de asimilación, o sea, de las primeras implicaciones entre significaciones (por ejemplo, cuando hay puestas en relación entre la visión y la prensión, con evaluación progresiva de las distancias adecuadas).

[2] J. Piaget, *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*, Neuchatel y París, Delachaux y Nestlé, 1936. Hay traducción española, *El nacimiento de la inteligencia en el niño*, Madrid, Aguilar, 1969.

[3] T. G. R. Bower, *Development in Infancy*, San Francisco, Freeman, 1974.

[4] H. Sinclair, M. Stambak, I. Lézine, S. Rayna y M. Verba, *Les bébés et les choses*, París, P.U.F., 1982.

A esta fase inicial sucede una etapa, todavía sensoriomotriz, de implicaciones entre acciones, pero ya lo suficientemente sistemáticas como para dar lugar a estructuras estables. Por ejemplo, una vez elaborada la permanencia de los objetos momentáneamente ocultos por una pantalla, descubrir que esos objetos ocupan la última de las posiciones sucesivas a las cuales habían llegado, y no la primera de aquellas donde fueron ubicados, lo que implica una coordinación de posiciones y desplazamientos, por lo tanto un comienzo de formación del "grupo de los desplazamientos" [5] Por supuesto, tales estructuraciones suponen no solamente la constitución de implicaciones positivas, sino también la utilización adecuada de exclusiones o negaciones, además de los comienzos de inversiones señaladas más arriba.

A partir de la elaboración de la función semiótica, esas implicaciones entre acciones se acompañan de enunciados, dando lugar a la formación de implicaciones significantes entre enunciados, pero nuevamente determinadas por las significaciones sin ser reductibles a las meras extensiones, las cuales permanecen relativas a las imbricaciones e inherencias sin recurrir a una tabla general de verdad.

En este nivel, un tercer resultado de nuestras investigaciones ha demostrado tener un claro interés: se asiste a la formación precoz de operaciones, en el plano de las acciones, aunque, naturalmente, sin poder reunirlas todavía en estructuras de conjunto (tales como los "agrupamientos", etc.). Cada una de ellas, considerada aparte y en relación con su contexto de significaciones, resulta ser isomorfa con cada una de las 16 operaciones binarias de la lógica de las proposiciones. Hasta ahora habíamos considerado a esas operaciones como una característica de los sistemas que se constituyen hacia los 11-12 años únicamente. Esto era así por dos razones. La primera es que en ese nivel comienza el pensamiento hipotético-deductivo, es decir, la posibilidad de extraer las consecuencias necesarias de puras hipótesis y no exclusivamente de los datos constatables (tal como ocurre en el nivel de las "operaciones concretas", a los 7-10 años). La segunda razón de esta formación tardía es que entre las 16 operaciones binarias de ese nivel hipotético-deductivo se establecen entonces relaciones de inversiones *N* y de reciprocidades *R* constituyendo grupos de cuaternalidad (grupos *INRC* donde *C* = inversa de *R* y correlativa de la identidad *I*) utilizados por el sujeto en situaciones físicas tales como la igualdad de acciones y reacciones, etc. [6] Es pues sorprendente e instructivo reencontrar las 16 combinaciones binarias en el plano de las coordinaciones entre acciones, es decir, mucho antes de cual-

[5] J. Piaget, *op. cit.*

[6] J. Piaget, *Essai de logique opératoire*, 2ª ed. (*corregida por* J. B. Grize, del *Traité de logique*, París. P.U.F., 1949), París, Dunod, 1972. Hay traducción española: *Ensayo de lógica operatoria*, Buenos Aires, Guadalupe, 1977.

quier pensamiento hipotético-deductivo y a fortiori mucho antes del empleo de la estructura *INRC*. De hecho, lo que se observa en los niveles precoces son simplemente las 16 combinaciones posibles entre los pares de acciones, pero sin sistemas de conjunto; cada combinación se efectúa en función de contextos variables. Ahora bien, como los funtores "y" y "o" presentan en "comprensión" diversas significaciones que trataremos de distinguir, esas 16 combinaciones no constituyen entonces sino 16 casilleros que pueden contener mucho más que 16 operaciones, en función de las conjunciones, disyunciones, incompatibilidades, implicaciones mutuas, etc. que los sujetos elaboran según las situaciones, pero apoyándose siempre sobre implicaciones significantes. Esas implicaciones —implícitas o explícitas— son teóricamente (o sea desde el punto de vista del observador) reductibles a combinaciones de implicaciones y de negaciones: por ejemplo, $p \bigcirc q$ (donde $\bigcirc \equiv$ conjunción intensiva = df $q \rightarrow \bar{\bar{q}}$) y p y q (donde $\vee \equiv$ disyunción intensiva = df $\bar{p} \rightarrow q$). Esto equivale a decir que en todos los niveles el fundamento de toda lógica es inferencial, lo que es obvio para una lógica de las significaciones.

En resumen, el objetivo de esta obra es mostrar cómo se prepara la construcción de tal lógica en tanto prolongamiento natural, e incluso obligado, de nuestra lógica operatoria hasta hoy demasiado vinculada (aunque solo parcialmente) a la lógica extensional corriente. Pero, así presentada, el lector puede tener la impresión que ese objetivo general cubre en realidad dos objetivos particulares e incluso tan diferentes entre sí que hubiera sido preciso, para mayor claridad, desarrollarlos separadamente en dos partes de esta obra, en tanto que nosotros parecemos mezclarlos sin razón necesaria a riesgo de complicar la lectura de cada uno de los capítulos. Los dos tipos de investigaciones consistirían, por una parte, en describir la formación y la multiplicación de las significaciones, insistiendo a la vez en su diversidad y en sus caracteres comunes, o sea, sobre "la significación de las significaciones" (confróntese la obra bien conocida *The meaning of meaning* de Odgen[7]); y, por otra parte, en analizar más profundamente la naturaleza de las implicaciones significantes, y sobre todo de aquellas que consisten en "implicaciones entre acciones" u operaciones (de las cuales, salvo error u omisión, somos los únicos que hemos hablado).

Sin embargo, si bien se trata, efectivamente, de dos trabajos diferentes, y podemos dar la impresión de confundirlos sin cesar y sin razón suficiente, ellos son en realidad indisociables, a pesar de sus diferencias. Esto es así por una razón esencial sobre la cual conviene insistir desde el inicio; su unión no se debe simplemente a

[7] C. Odgen y I. A. Richards, *The meaning of meaning*, 4ª ed., Londres, Routledge, 1936.

ciertos caracteres comunes (como sería una inclusión o una intersección), sino a un hecho mucho más importante e instructivo. Se trata de dos términos de un intercambio dialéctico, de dos polos de un ciclo que se imponen desde el inicio y prosiguen bajo la forma de una espiral a lo largo de todo el desarrollo.

Como lo hemos dicho antes, todo observable está siempre vinculado a una interpretación y ésta comporta necesariamente, por una parte, significaciones, pero también, por otra parte, vínculos inferenciales entre éstas o en función de las precedentes. Y esas inferencias, implícitas tanto como explícitas, no podrían consistir, desde sus formas elementales, sino en implicaciones entre significaciones, o sea entre esquemas de acciones. Es así como ya desde el esquema más elemental, aun preprogramado, que es el de la succión, ya hay implicaciones (entre desplazamientos y logros o fracasos) cuando el lactante ubica mal su boca y debe modificar su posición para ajustarla al pezón. Por otra parte, veremos en el capítulo I cómo tiene lugar, esta vez en conductas enteramente adquiridas, la elaboración simultánea de significaciones y de implicaciones en las conductas de utilización de "instrumentos".

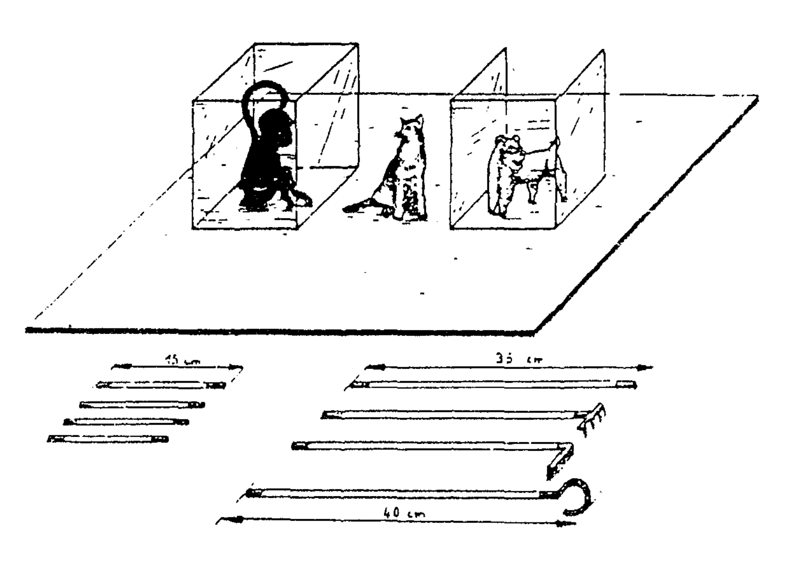
I. Significaciones e implicaciones en las conductas instrumentales

con la colaboración de D. de Caprona y A. Ritter

El objetivo de esta investigación es analizar la formación de las significaciones y de las implicaciones entre acciones involucradas en esos comportamientos —tan frecuentemente y tan bien estudiados, por tantos autores (a partir de los trabajos de W. Koehler sobre los chimpancés)— y que consisten en utilizar diversos objetos en calidad de "instrumentos" para lograr diferentes fines no accesibles a la mano. Si retomamos aquí ese problema clásico, es porque esas conductas han sido poco analizadas desde el punto de vista de su lógica interna, y porque es ésta la que establece la transición entre la lógica sensoriomotriz y la lógica de las anticipaciones y representaciones preoperatorias.

El material utilizado (fig. 1) consiste en una plancha grande y ancha en cuya extremidad están alineados tres objetos: 1) a la izquierda, un monito depositado en una caja inmovilizada y transparente, sin tapa, de la cual se puede sacar al mono hacia arriba para atraerlo hacia sí; 2) a la derecha un perrito situado en una caja similar pero que tiene solamente tres lados; se puede empujar al perro hacia atrás (lado libre), hacerlo contornear la caja y atraerlo hacia sí; 3) entre ambos está un gato sin caja, que se puede atraer sin más. Los instrumentos (libremente disponibles) son: 1) un palo de 35 cm; 2) otro palo de 40 cm que tiene en su extremidad un gancho que permite hacer subir al mono hasta sacarlo de su caja, o empujar al perro; 3) un rastrillo de 35 cm y 4) una vara de 35 cm con un codo final que puede servir para empujar al perro, o atraer al perro o al gato. A partir de cierta edad se agregan elementos insertables rectilíneos (15 cm) que pueden servir para cambiar o modificar los instrumentos 1 a 4.

Figura 1



Podemos distinguir tres niveles de reacciones. El primero está caracterizado por simples exploraciones cuyo objetivo es atribuir significaciones a esos cuatro mediadores virtuales, pero limitándose a utilizaciones inmediatas tales como golpear, empujar, etc. sin ver aún en ellos instrumentos que sirven para atraer hacia sí los objetos deseados, o sea sin utilizarlos aún en calidad de instrumentos. A ese nivel no instrumental sucede un nivel intermediario (nivel II) con comienzos de significaciones instrumentales pero esporádicas y mezcladas con comportamientos de nivel I. Finalmente, en el nivel III, las conductas instrumentales son adquiridas con éxito inmediato o bien con un éxito laborioso.

1. Nivel I

Veamos primero ejemplos del *nivel I*:

SOA (1;2) A pesar de la consigna de "buscar" a los animales con los instrumentos, no manifiesta ningún interés por éstos y se limita hasta el final a ensayos infructuosos de prensión directa con la mano. El experimentador ubica el rastrillo frente al gato. La niña junta entonces los palos y los empuja hacia el gato, lo que lo hace caer hacia atrás de la plancha, y empuja de la misma manera la caja del perro, que no se mueve. Se vuelve a poner al gato en su lugar y ella lo empuja de nuevo por etapas hasta que se cae nuevamente, entonces mira al gato, mira luego su

mano, mueve sus dedos (mostrando bien así su deseo de agarrar los objetos) y tiende su brazo hacia el gato, pero poniendo el palo al lado de su brazo extendido sin intentar un contacto entre ambos.

XAN (1;8) intenta tomar el gato con la mano aproximándose a él; luego, siempre mirando al gato, mete el rastrillo por encima de la plancha y la golpea sin atraer al animal. Esta conducta se repite muchas veces en el curso del interrogatorio ya sea con el rastrillo solo, o bien con todos los instrumentos reunidos. Luego toma el rastrillo por los dientes, lo da vueltas, lo pasa a la otra mano, golpea nuevamente la plancha, hace deslizar el gancho de adelante hacia atrás, toma el palo en forma de codo, mira el codo y lo ubica sobre la plancha, etc. El experimentador atrae entonces al gato con el rastrillo y luego lo vuelve a poner en su lugar; *Xan* imita esta conducta pero no se sirve de ella en modo alguno en lo que sigue, y cuando se repite esto con el palo, él toma el rastrillo y en lugar de tener como objetivo el gato, lo utiliza para golpear la plancha varias veces seguidas. Toma el palo en forma de codo, lo toma por el codo, pone el otro extremo en una de las cajas y la empuja en lugar de intentar atraerla hacia sí. Inserta el extremo del rastrillo en la caja del perro, luego golpea la plancha con el rastrillo y luego con el palo en forma de codo. Hace lo mismo con los instrumentos reunidos, etc.

CHI (1;1) toma el rastrillo y lo utiliza para realizar barridas laterales, luego frotamientos y finalmente golpea la plancha. Como se le muestra que se trata de atraer el gato hacia sí (consigna repetida), mete el extremo del rastrillo delante del gato, pero lo empuja tres veces; luego mantiene el rastrillo en posición vertical y golpea con él la plancha y hace lo mismo con el gancho. Como se le muestra entonces el perro fuera de su caja, poniendo el rastrillo en su prolongación, toma el rastrillo, lo lame y señala al perro con el dedo, luego se inclina y lo toma con la mano. Conducta similar con el palo.

BEL (1;4) Comienza explorando los instrumentos sin relación con los animales a pesar de la consigna; mientras mira a los animales, toma el rastrillo y el gancho, los desplaza varias veces y hace rodar el palo sobre la mesa o lo mantiene en el aire. Se le muestra cómo atraer hacia sí al gato con el palo y se vuelve a ubicar el gato en su lugar; toma entonces el gancho pero empuja con él al gato en lugar de atraerlo hacia sí. Se vuelve a atraer al gato con el rastrillo, pero él no imita este movimiento sino atrayendo hacia sí el rastrillo sin actuar sobre el gato y sin ni siquiera mirarlo. Se recomienza; esta vez toca al gato pero lo empuja y lo hace salir de la plancha. Se le pone en su posición y reinicia sus ensayos pero esta vez con movimientos laterales que golpean sin intención la caja donde está el mono. Con respecto al perro, el niño se limita a golpear sobre la caja que lo contiene y sobre el animal y luego hace lo mismo sobre la plancha y sobre el gato. Finalmente intenta sin éxito enganchar al mono con el gancho, lo que constituye un comienzo, aunque no exitoso, de relación instrumental. Cuando lo vemos dos meses después, *Bel* pasa al nivel II (véase más adelante).

PAO (1;9) Es interesante por los intentos para poner en contacto los instrumentos y los animales pero sin utilizar los primeros para atraer hacia sí los segundos. Toma primero el palo, lo mira y lo deja. Se le da el rastrillo, lo mira, lo da vueltas, lo pone sobre la plancha y lo empuja hasta ponerlo delante del gato y se detiene. Se coloca el gato a mitad de camino; esta vez ella toca al gato, pero en lugar de utilizar ese contacto pasa a una prensión directa. Se recomienza con el gato a mitad de camino; esta vez pone el rastrillo sobre el dorso del gato y luego lo toma con su mano. Se efectúa la acción de atraer al gato con el rastrillo y

luego se le da este último; ella se limita a poner el rastrillo en equilibrio sobre los dientes (o sea en vertical) luego de haberlo tenido en el aire para explorar su forma.

Estas reacciones iniciales son interesantes desde distintos puntos de vista. En primer lugar, resulta claro que no son en modo alguno instrumentales en el sentido sugerido por la consigna: atraer hacia sí animales demasiado alejados como para ser tomados directamente con la mano. Los cuatro mediadores posibles ofrecidos al sujeto no tienen aún para éste la significación de intermediarios útiles para lograr la finalidad indicada, e incluso cuando se atrae con el rastrillo al gato —tal como se hizo delante del niño *Bel*, cosa que éste pudo imitar— el niño comprende tan poco de la relación "atraer hacia sí con un instrumento" que no lo utiliza en ningún momento en lo que sigue y ni siquiera utiliza el rastrillo sino para golpear la plancha. No se trata, como podría pensarse, que el sujeto olvide o menosprecie la consigna: *Soa* mira al gato y su mano, cuyos dedos mueve, luego la tiende hacia el gato y apoya el palo paralelamente a su brazo extendido sin búsqueda de contacto; hay, pues, a la vez, comprensión de lo que habría que hacer e incomprensión de las relaciones que permitirían hacerlo.

Desde el punto de vista de las significaciones, los comportamientos de estos sujetos no son menos interesantes. Su fase inicial, que es la exploración de los cuatro instrumentos, debe ser naturalmente concebida como una búsqueda de sus significaciones, como "lo que se puede hacer con ellos". Esas significaciones son de dos tipos: las unas son relativas a sus propiedades generales y las otras, más ocasionales, se vinculan a sus relaciones posibles con los animales. Entre las primeras podemos citar el hecho de que el palo puede estar apoyado sobre la mesa, puede hacérselo rodar *(Bel)* o tenerlo verticalmente; que el rastrillo puede ser tomado por el mango o por los dientes o mantenido en equilibrio sobre éstos (en vertical); que todos ellos pueden ser desplazados y deslizados, etc., pero no deformados; y que si bien todos son de forma alargada, difieren, sin embargo, en sus extremidades. Pero si esas significaciones generales son de tipo corriente y son inmediatamente constatadas o registradas por los sujetos de mayor edad, el interés de este primer nivel es que los sujetos pequeños necesitan exploraciones activas para tomar nota de ellas, mostrándonos así que las significaciones son atribuciones de acciones, o sea de esquemas de asimilación a objetos cuyas propiedades no se reducen así a observables "puros" en el sentido en que "puro" significaría independiente de cualquier interpretación.

En cuanto a las significaciones relativas a la situación local, o sea a la presencia de los animales que se trata de alcanzar, ellas son múltiples aunque ninguna consista en "atraer hacia sí". La más simple consiste en orientar al mediador en la dirección del objetivo, lo que hace *Soa* quien coloca el palo paralelamente a su brazo

extendido, mostrando claramente una intención de aproximación. Una conducta también frecuente, pero de significación poco clara, es la de golpear la plancha, lo que podría quizás constituir una significación del primer tipo, pero que quizás no indique más que una intención de sacudir a los animales, o sea, de ponerlos en movimiento con la esperanza de aproximarlos (véase el ejemplo de *Bel* que golpea alternativamente sobre la plancha y sobre el gato). Cuando el animal resulta alcanzado por el instrumento, las dos acciones dominantes —y en mucho— son golpear o desplazar lateralmente en lugar de atraer hacia sí. Pareciera como si el instrumento consistiera en un prolongamiento del brazo del sujeto, pero solamente del brazo y no del brazo y de la mano reunidos como si fuera una prensión directa.

Aunque todas estas significaciones generales o locales consistan, según nuestra hipótesis directriz, en atribuciones de acciones a los objetos, ¿qué ocurre con las implicaciones entre significaciones o acciones? Se podría pensar en admitir que aún no existen, en la medida en que son aún implícitas. Pero eso no es así, porque atribuir significaciones a los objetos tanto como a las acciones consiste en interpretarlos, y la interpretación es una conducta compleja de base constantemente inferencial, por banales que sean las implicaciones que ellas supongan. Alcanzar un objeto implica aproximarse a él, y empujar implica la continuación de ese movimiento de "ir hacia", en tanto que atraer implicaría un movimiento de dirección inversa, y por eso su mayor dificultad; desplazar lateralmente implica un pasaje de la dirección "hacia" a su perpendicular; golpear la plancha implica para el sujeto la posibilidad de un resultado favorable, etc. En una palabra, cada acción se inserta en un conjunto de condiciones previas y un conjunto de resultados seguros o posibles y, por ello, desde ese primer nivel se puede hablar de la presencia de implicaciones proactivas y retroactivas (que Peirce llamaba "predictivas" y "retrodictivas").

2. Casos intermediarios entre "empujar" y "atraer"

Desde el nivel I se asiste a casos de barrido lateral pero no intencionales o sin que el sujeto vea en ellos un intermediario posible que conduzca finalmente a "atraer". Los casos siguientes muestran, por el contrario, de qué manera los movimientos laterales pueden ser explotados por el sujeto en la dirección de la solución buscada.

BEL (1;6), entrevistado nuevamente dos meses después de sus reacciones del nivel I, comienza como antes por golpear sobre la plancha, empujar el objetivo, etc.; pero después de haber puesto los dientes del rastrillo detrás del gato, se le ocurre la idea de dirigirlo hacia su otra mano tendida. Pero coloca la extremidad del rastrillo sobre el dorso del gato, lo jala oblicuamente y logra tomarlo con la otra mano. La vez siguiente dirige intencionalmente al gato de derecha a izquierda hacia su otra

mano pero no lo logra. Vuelve a poner los dientes del rastrillo sobre el dorso del gato, apoya fuertemente y lo hace dar vuelta pero no logra poner el rastrillo por detrás y simplemente lo empuja. Lo golpea varias veces, con lo cual consigue aproximarlo un poco. Habiendo golpeado una caja, empuja toda la plancha y se le ocurre entonces la idea de atraerla en conjunto, para lograr una prensión directa. Utiliza luego el gancho y lo aproxima de nuevo con la otra mano. Para lograr atraer al mono, pone el gancho en la caja pero no logra engancharlo. En el caso del perro se limita a golpear la caja.

CRI (2;2) imprime al gato un movimiento lateral con el gancho, luego lo empuja y luego lo desplaza con el rastrillo y lo toma con la otra mano. Por el contrario, cuando el adulto coloca el rastrillo detrás del gato, *Cri* lo atrae hacia sí directamente. Consigue sacar al perro de su caja pero se limita luego a una prensión directa.

JOE (2;10) ubica el instrumento detrás del gato, lo atrae un poco y continúa lateralmente hasta tomarlo con la otra mano. Por el contrario, consigue sacar al mono con el gancho y lo atrae entonces directamente hacia sí. Luego consigue atraer directamente al gato pero, en cambio, una vez que saca al perro de su caja, solo lo atrae por algunos centímetros y luego lo toma con la mano.

CAP (2;10) Se le pregunta "¿Puedes tomar al gato con el rastrillo?" Responde *"no"*. Sin embargo lo intenta y lo logra en dos tiempos. Este éxito le da la idea de que podría hacer lo mismo con los otros animales y los otros instrumentos. Se pone al perro en el medio (fuera de la caja) y la niña toma el palo, pero dice *"es para después"* y elige el palo en forma de gancho diciendo *"con esto sí"*; atrae hacia sí al perro, pero no lo logra con el mono ni con el perro (que fue puesto en su caja) por no conseguir diferenciar los movimientos necesarios en el interior de las cajas.

Estos casos de transición son útiles de citar desde el punto de vista de las implicaciones entre acciones. En el nivel I, además de los movimientos de golpear y de empujar, los sujetos realizan a veces barridos laterales pero sin intención de aproximar los objetos. Por el contrario, en las conductas que presentamos ahora, se trata de desplazamientos oblicuos dirigidos por una mano (que sostiene el instrumento) hacia la otra mano que está libre y espera. Hay pues allí una especie de síntesis entre los desplazamientos debidos a los instrumentos y la prensión directa. Pero hay allí, sobre todo, una inferencia que consiste en admitir que, si ciertas direcciones han sido seguidas, otras son posibles, lo que conduce a varios de estos sujetos a pasar de la acción de empujar a los movimientos laterales u oblicuos, y de allí finalmente a atraer hacia sí. Señalemos por otra parte el espíritu de generalización de *Cap* que intenta pasar de un animal a otro con instrumentos diferentes, ("esto es para después") sin lograrlo, por otra parte, más que para el gato y el rastrillo, pero después de haber negado que ello fuera posible.

3. Niveles II y III

Clasificamos en el nivel II a los sujetos que logran de inmediato

atraer hacia sí al gato, pero fracasan tanto en el caso del mono como sobre todo, en el del perro, situados en cajas y que exigen, por lo tanto, diferenciaciones y coordinaciones de acciones. Veamos ejemplos del nivel II.

AMO (3;4) Atrae de inmediato al gato con el rastrillo tendido y puesto hacia abajo. Para el perro ubica el gancho sobre una pared, luego tira sobre la abertura y abandona. Ubica el rastrillo sobre un borde y luego lo introduce, empuja y tira todo tratando de sacar al animal. Abandona. Para el mono ubica el gancho detrás, toca su cola con la extremidad sin ocuparse del bucle que hace la cola, pero llega en parte fortuitamente a sacarlo aunque solo lo atrae por prensión directa.

ROL (3;6) Pone primero el rastrillo encima del gato, luego detrás y lo atrae. En cuanto al perro, no lo saca de la caja sino que lo atrae hacia él, lo da vueltas, etc.: *"El perro no quiere venir"*. Intenta con el palo acodado: *"No puedo"*. Continúa con los otros instrumentos pero no lo logra. En el caso del mono, logra sacarlo con el gancho que está inserto en el bucle que forma la cola (logrando así un pasaje local al nivel III).

MAN (3;5) Hace mover al perro y lo da vueltas cinco veces, etc., sin hacerlo salir.

Veamos ejemplos de sujetos del nivel III:

JES (2;1, precoz) Atrae al gato sin problemas, luego pasa a ocuparse del mono con el rastrillo: ubica a éste bajo el mono y lo levanta un poco haciendo palanca con el mango y apoyándolo sobre el borde de la caja; hace esto 5 veces hasta lograr sacar al animal. Se lo vuelve a poner en su lugar pidiéndole a *Jes* que utilice otro procedimiento: toma el gancho y lo introduce en el bucle que forma la cola del mono y logra sacarlo. El gancho le sirve luego para empujar al perro por la parte abierta de la caja (es decir, del lado opuesto al del sujeto) y luego lo atrae.

CAR (3;4) Comienza haciendo salir al perro por encima de una de las paredes haciendo palanca con el rastrillo y dice: *"Se puede hacer así"* Pero luego ve que es más simple empujarlo por la parte libre trasera de la caja: lo empuja, lo desplaza hacia la izquierda en dos gestos y lo atrae. Recomienza con el palo en forma de codo y luego se divierte alargando los mangos de los instrumentos con los sectores preparados a tal eféctо.

ROS (3;6) De inmediato engancha al mono por su cola enrulada y lo atrae hacia ella. Para tomar al perro elige el rastrillo y lo empuja hacia atrás diciendo: *"Aquí no hay puerta"*; así puede atraerlo hacia sí.

DAN (4;6) Engancha al mono por la cola con los dientes del rastrillo y lo saca. Para sacar al perro toma el gancho y al principio solo le imprime rotaciones, luego toma el palo curvado, empuja al animal fuera de su caja, lo desplaza alrededor de ésta y lo atrae hacia sí.

ANA (4;6) Idénticas reacciones: de inmediato empuja al perro detrás de la caja, luego a la izquierda y lo atrae hacia sí. Levanta muy prudentemente al mono con pequeñas detenciones en los movimientos.

Solamente en este nivel III se coordinan los tres esquemas de empujar al perro para hacerlo salir hacia atrás, desplazarlo lateral-

mente alrededor de la caja y atraerlo hacia sí. Hay pues allí anticipaciones y programa de acciones, lo que falta aún en el nivel II, nivel en el que están claros los fines a alcanzar pero donde el empleo de los medios permanece vinculado a ensayos con logros parciales o fracasos no siempre comprendidos.

En lo que respecta a las significaciones hay progresos en las de los objetos o instrumentos. Estos ya no son solamente sólidos indeformables, globales y alargados, que sirven para atraer a sí lo que la mano no puede alcanzar. En el nivel III cada parte del instrumento tiene una significación específica: la parte curvada del gancho tiene por significación enganchar, la parte final del palo curvado tiene por significación empujar o atraer. Lo mismo ocurre con los dientes del rastrillo pero con un margen más amplio. Solamente el palo no tiene significación funcional especializada.

En cuanto a las implicaciones entre estas diferentes acciones caracterizadas por sus significaciones funcionales, el problema principal para discutir a propósito de esta investigación —y que también encontraremos en muchas otras— es el de justificar la distinción entre las relaciones de causalidad y las inferencias implicativas. Resulta claro, en efecto, que en cada uno de nuestros niveles la secuencia de acciones presenta un carácter causal (tanto como teleonómico): atraer al perro hacia sí después de haberlo sacado de su caja es un resultado causal (entre otros posibles) por el hecho de que las acciones involucradas se encadenan, se condicionan y se determinan sucesivamente, sin consistir en una simple serie de observables a modo de las sucesiones regulares de Hume Se trata pues de justificar desde el comienzo de esta obra, y desde las formas elementales y sensoriomotrices estudiadas en este capítulo, por qué hablaremos sin cesar de implicaciones entre acciones consideradas en su significación.

El primer argumento es que, según su nivel, los sujetos pueden abstenerse de actuar materialmente y limitarse a anticipar lo que podrían hacer, incluidos los errores a evitar. Ahora bien, anticipar consiste en deducir y toda deducción o inferencia es una serie o un sistema de implicaciones.

En segundo lugar, esas anticipaciones inferenciales no se refieren a las condiciones materiales de las acciones (al detalle de los movimientos de los músculos del brazo y de la mano que actúa) sino a las significaciones, en tanto atribuciones de esquemas cognitivos del sujeto, que intervienen en cualquier interpretación de los objetos y de las actividades que sobre ellos se ejerzan.

En tercer lugar, los programas producidos por los sujetos se acompañan de inmediato de justificaciones que serán confirmadas o refutadas por los éxitos o los fracasos, pero que constituyen realidades de otra naturaleza que preparan los valores de verdad.

En cuarto lugar, la coordinación de los tres esquemas de empujar hacia fuera, desplazar lateralmente, y atraer luego hacia sí, que

caracteriza al nivel III (en el caso del perro y de su caja abierta en la parte trasera) constituye una anticipación deductiva de tipo superior. Ella consiste en construir un esquema de conjunto compuesto por esquemas parciales ligados en una totalidad coordinativa, cuya naturaleza inferencial es innegable en tanto implicación entre implicaciones. Por otra parte, aun cuando tal coordinación tenga carácter representativo y sobrepase los niveles sensoriomotrices, es preciso que sus ingredientes hayan sido preparados anteriormente, lo cual justifica la existencia de implicaciones más simples y elementales.

Todas estas consideraciones nos parecen justificar el empleo de la noción de implicaciones entre acciones, diferente de su causalidad. La causalidad, por supuesto, también interviene, y esos dos aspectos de las conductas instrumentales son incluso inseparables aunque diferentes entre sí. Se puede ir aun más lejos y sostener que los sistemas inferenciales involucrados constituyen "modelos"; la atribución de estos modelos a los objetos y a sus acciones exteriores al sujeto es lo que constituye precisamente la causalidad, sin lo cual éstas se reducirían a la sucesión regular de observables que resulta suficiente solamente para los empiristas.

II. Los desplazamientos en el interior de una estructura de árbol

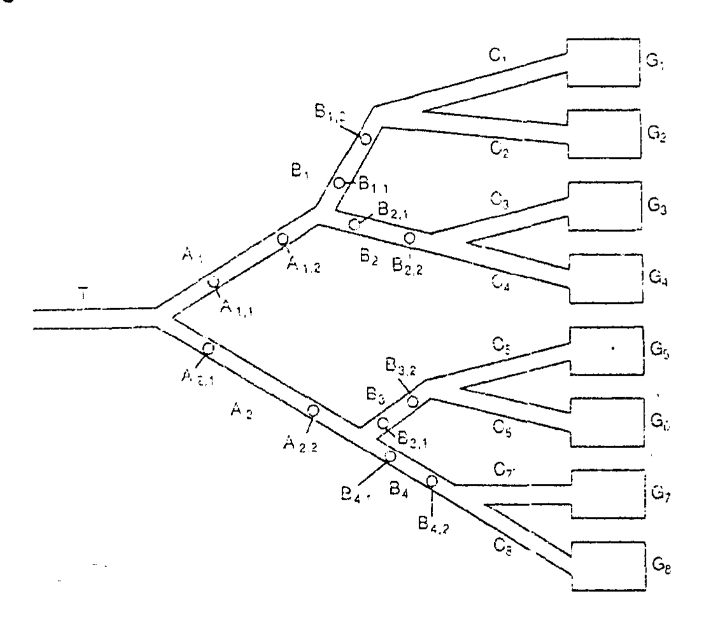
con la colaboración de C. Monnier y C. Vachta

En el capítulo precedente las trayectorias debían ser inventadas por los niños. En la situación que vamos a estudiar ahora, esas trayectorias están dadas bajo la forma de un árbol y por lo tanto se trata solo de elegir entre ellas. Pero esas elecciones exigen imbricaciones y exclusiones, y como un árbol es isomorfo a un "agrupamiento" de clasificación, las implicaciones entre acciones que intervienen desde el comienzo (ya sean éstas erróneas y por lo tanto exigiendo una corrección, o bien siendo correctas de inmediato) se coordinan cada vez más entre ellas, de un nivel de desarrollo al siguiente. Se llega así finalmente a operaciones propiamente dichas de inclusiones y de exclusiones que son constitutivas de ese agrupamiento. De aquí resulta el interés de este caso para la elaboración de una lógica de las significaciones.

El árbol se presenta en posición acostada, con el tronco principal a la izquierda y con ramificaciones que se multiplican hacia la derecha, lo cual excluye un "arriba" y un "abajo" que podrían ser fuente de dificultades artificiales. El tronco principal *T* se subdivide en dos gruesas ramas *A*1 y *A*2. Cada una de éstas se divide a su vez en dos ramas: *B*1 y *B*2 para *A*1; *B*3 y *B*4 para *A*2. Por lo tanto, hay cuatro *B*, cada una de las cuales se dicotomiza a su vez en dos ramas pequeñas: *C*1 y *C*2 para *B*1; *C*3 y *C*4 para *B*2; *C*5 y *C*6 para *B*3; y *C*7 y *C*8 para *B*4. Cada una de esas ramas extremas desemboca en un garaje *G*, hay por lo tanto ocho *G*. El tronco *T* y todas las ramas son huecos, de manera que un auto de juguete introducido en *T* llegará forzosamente a uno de los 8 garajes *G*. Para poder saber a cuál de los garajes llegó y por dónde pasó para alojarse en uno de los *G*, el auto está fijado a una cinta larga y delgada que permanece en su lugar de *T* a *G* después de la detención final del autito en *G*. Por otra parte, las dos ramas *A* y los cuatro segmentos *B* están provistos de dos pequeñas ventanas circulares que el niño puede abrir o cerrar para constatar si esa

rama contiene o no un sector de la cinta. El auto no puede retroceder ni dar vuelta sobre sí mismo.[1]

Figura 2



Con este material son posibles múltiples inferencias y operaciones. Si la cinta está en *A*1 esto implica que el auto está en uno de los *G* de *G*1 a *G*4 excluyendo los *G* de *G*5 a *G*8; si la cinta está en *A*2 el auto debe haber pasado por *B*3 o por *B*4, etc. Ahora bien, como el "agrupamiento" de las clasificaciones puede presentarse bajo la forma de un árbol, el árbol del que aquí se trata es isomorfo a ese agrupamiento, de tal manera que después de haber analizado algunas de las implicaciones sensoriomotrices, llegaremos a las implicaciones entre operaciones de agrupamientos en tanto fundadas sobre significaciones acompañadas de enunciados pero de naturaleza no extensional. Hemos podido distinguir cuatro niveles: I*A* y I*B*, II y III.

[1] Los otros símbolos utilizados serán *V* = auto y *F* = ventana.

1. Nivel IA

Veamos ejemplos del nivel *IA* (4-5 años):

SAB (4;7) Comienza abriendo todos los *G* hasta encontrar el que corresponde y cuando se le pide, muestra el camino que conduce hacia dicho *G*. "—Abre solamente las ventanas que sirven para encontrar la cinta. —(La niña abre *A*1) *Sí*. —¿Qué quiere decir? —*Que la cinta está pegada al autito*. —¿Dónde llegó el autito? —*Aquí* (*G*1). *No*. (El autito está en *G*2). —¿En algún otro? —*No*. —Fíjate. —(Muestra *G*2, correcto). —¿Es mejor empezar por abrir las ventanas en *A*, en *B* o en *C*? —*En C*. —¿Y abrir antes, ayuda a saber? —*No*. —¿En *B*? —*No, no sirve para nada*. —¿Y en *C*? —*Sí*. —¿Por qué?— . . ." El experimentador pone el autito en *G*5 y dice: "—Prueba abriendo pocas ventanas. —(La niña abre *A*1) *No*. (Abre *A*2,1) *Sí*".[2] La niña abre entonces *A*2,2 lo que resulta inútil ya que se trata del mismo segmento, luego hace lo mismo con *B*4,1 y luego con *B*4,2 y dice: *"No"*. Abre, sin embargo *C*7 y *C*8, contradictorias con el vacío de *B*4. La niña pasa a *B*3,1 diciendo: *"Sí"*, pero de todos modos abre *B*3,2 (lo cual es inútil). Se le pregunta: "—¿En cuál *G* está el autito?" Muestra *C*4, *C*3, *C*2 y luego *C*1, que dependen de *A*1 y son por lo tanto contradictorias con *A*2. Luego muestra *C*5, casi por casualidad, porque viene luego de la serie *C*1-*C*4 (erróneos). Se le pregunta: "—¿Y cuando no hay cinta qué pasa? —*No quiere decir nada*. —¿Si la cinta está en *B*1, dónde estará el autito? (Muestra de *G*1 a *G*5, siendo que solamente *G*1 o *G*2 serían correctos)". Si bien le resulta fácil a *Sab* remontar de los *G* hacia *T*, no llega a establecer ninguna imbricación en el sentido de las *A* hacia los *G*. "—¿Sirve para algo abrir alguna *A*? —*No*. —¿Y alguna *B*? —*No, no sirve para nada*".

XIS (4;11) "—¿Sirve abrir alguna *A*? —*No, allí en C*. —¿Y allá (en *B*)? —*No*".

ERI (5;8) Abre al azar los *G*. "—¿Es más fácil si abrimos primero una en *A*? —*No, porque no va hacia arriba*. —¿Si abriéramos en *A* o *B*, nos serviría? —*Se podrían abrir las otras, pero es mejor las C porque están más cerca del garaje*".

DAV (5;0) Comienza en *C* y abre siete G antes de encontrar el que corresponde (*G*1). Cuando se le pregunta, muestra con el dedo el camino seguido por el auto. A pesar de esto, cuando el autito se ubica en *G*6 procede también por *C* sucesivos. "—¿Y estos pedazos (*A*) sirven para algo? —*No*. —Muéstrame por dónde pasó el autito. —(Abre *B*4 a pesar de que la llegada en *G*6 implica *B*3). —¿Pasó por allí? —*Sí, aquí* (muestra el camino *A*2-*B*4-(*G*8) y se sorprende al no encontrar el autito; se corrige mostrando *A*2-*B*3-*G*6, lo cual es correcto). —Trata de no abrir muchas ventanas; ¿sirve o no sirve abrir las *A*? —*Sí* (abre *A*1,1 y *A*1,2 lo que es inútil, y continúa en *B*1). —¿Adónde puede llegar el autito? —*Allá* (de *G*1 a *G*4 aun cuando *G*3 y *G*4 están excluidos). —¿No puede ser allí? (de *G*5 a *G*8) —*No, porque la cinta no está en A2*". Pero cuando el autito es puesto en *G*8 recomienza mostrando solamente los *C*.

Resulta claro que el problema presentaría menos dificultades si los elementos *C*, *B* y *A* fueran objetos que directamente pudieran ser imbricados por inclusiones. Pero en esta experiencia el "agrupamiento", aunque sea isomorfo a una clasificación, ha sido presentado en forma arborescente infralógica-espacial (donde los *C*

[2] *A*2,1 significa *A*2 primera ventana y *A*2,2 significa *A*2, segunda ventana.

proceden por subdivisión de los *B* y éstos de los *A*). El hecho de que las posiciones resultan de trayectorias es lo que complica las preguntas para un sujeto que se centra en las posiciones finales sin deducir las trayectorias a partir de sus puntos de origen, lo que las priva de toda necesidad aunque no necesariamente de comprensión. De allí resulta la pobreza de las implicaciones, que solo son relativas a la reconstitución fácil del camino recorrido, una vez conocido su punto terminal en *G*, pero no a la anticipación del camino a partir de *T* hacia *G*. En efecto, esta anticipación no reposa sobre implicaciones simples del tipo $A \rightarrow B$ (o $A1 \rightarrow B1$), sino que se trata de una implicación en la cual el antecedente *A*1 entraña como consecuencia una dicotomía *B1* o *B2* cuyos términos se excluyen recíprocamente (símbolo w); por lo tanto, $A1 \rightarrow (B1 \text{ w } B2)$, etc. Hay así un "agrupamiento" de la forma habitual $A + A' = B$; $B + B' = C$, etc. Pero en este caso la lectura o incluso la construcción se hace en sentido inverso $B \rightarrow (A \text{ w } A')$; $C \rightarrow (B \text{ w } B')$ y no en el sentido directo $A \subset B \subset C$, como en el caso de la deducción del camino recorrido a partir de su punto terminal. De allí resulta la opinión general que "no sirve para nada" (*Sab*) partir de *T*, de *A* o de *B*, que ello es "inútil" (*Xis* y *Dab*) y ello es así porque "el autito no va hacia arriba" (*Eri*). En una palabra, la característica de este nivel I es la ausencia de imbricaciones cuando los trayectos deben ser construidos a pesar de que resulte fácil el reconstituirlos.

2. Nivel IB

Entre este nivel I y el nivel IIA donde comienzan las imbricaciones sistemáticas, encontramos una colección de casos intermediarios con una mezcla de implicaciones correctas del tipo $A1 \rightarrow (B1 \text{ w } B2)$ y de inferencias que aún no son válidas. En otros términos, encontramos el pasaje de un método puramente empírico (examen más o menos exhaustivo de las *C* despreciando los trayectos) a procedimientos semiempíricos y semideductivos. Este nivel IB está caracterizado, pues, por *imbricaciones parciales*.

HAD (5;6) Comienza por los *C* pero en el segundo intento parte de *B1* y *B3* y, como están vacíos, pasa a *A2* donde ve la cinta, pero concluye en *C7* y *C8* sin pasar por los *B* y encuentra el autito en *G8*. Se le pregunta si era útil abrir *B*3 y responde que no, ya que ha tenido éxito al pasar de *A2* a *G8* (ambos en línea recta en la parte de abajo del dispositivo). Cuando se le pide que solamente pruebe con tres ventanas muestra *B2* y *B3*, o sea un *B* de cada lado *A*.

RAC (6;6) Comienza por *B2* y luego *B1*; dice: "*¡Ah, el autito está allí!*" y muestra *C2* (correcto). En el segundo intento parte de *A2*, luego *B4* y *C8*, lo que es nuevamente correcto. Pero en el tercer intento, a partir de la comprobación de ausencia en *A1* (abriendo las dos ventanas como si la segunda ventana fuera a corregir la ausencia de cinta en *A1,1*), concluye directamente en *C4* y *C5*, que son incompatibles. Luego de la ausencia en *A1*, la niña concluye directamente en *B2* (que no deriva de *A2* sino precisamente de *A1*). "—¿Eso quiere decir que el autito no está en *B1*?

—*¡Ah!, ahora sí que entendí; debe estar en B2 porque está en A1 y después puede ser que dé vuelta* (= que se oriente) *hacia B2"*.
Pero, a partir de *B2* concluye erróneamente que está en *G8*, que depende de *B4*; etc.... "—¿Es mejor abrir en *A*? —*No, en cualquier lugar*. —¿Dónde es mejor? —*En A, B y C*". La niña sigue correctamente este orden en el intento siguiente, pero luego regresa (como en el nivel IA) a las enumeraciones de los *C* (con mezcla de un *B*). Esta niña manifiesta así álternancias extrañas entre deducciones correctas y retrocesos periódicos a las falsas inferencias del nivel IA.

GAB (6;0) Como en el caso anterior, vemos aquí implicaciones correctas mezcladas con implicaciones falsas del tipo *A1* → *B3* → *C4*, *C3*, *C2*, y *C1*.

DAN (6;0) Comienza brillantemente por *A2* → *B3* → *C6* y dice: "*Encontré*. —¿Habrías podido abrir menos ventanas? —*No*". Recomienza hasta *B3* y muestra de nuevo *C6*. "—¿Podría haber estado en otro *G*? (de hecho, *C5*) —*No*. —¿Estás seguro? —*Sí* (abre *C5* y encuentra el autito). —¿Es útil comenzar por *A*? —*A veces se puede empezar por C porque siempre uno encuentra*. —¿También por *A*? —*A veces uno encuentra y a veces no*. —¿Es mejor abrir en *A* o en *C*? —*A veces en la mitad*".

LAU (6;1) Solo produce inferencias correctas pero fáciles comenzando por *A* → *B* → C y justifica la llegada en *C5* o *C6* "*porque pasó por B3 y como no puede atravesar la ruta de B3 hacia B4 entonces solamente puede estar en C5 y C6*". Sin embargo, resume esto diciendo: "*Para ver por dónde ha pasado hay que empezar por B porque con A puede ir por aquí* (por arriba) *o por allá* (por abajo). —¿Entonces no hace falta abrir en *A*? —*En A después no se sabe en qué dirección va a ir; hay que empezar en B*. —¿Y en *C*? —*Sí, porque aalí se ve en seguida. Así como el juego está hecho no sirve para nada empezar por A y B*". *Lau* desprecia así totalmente el "porqué" de las posiciones finales, o sea la necesidad.

MIC (6;2) Va incluso más lejos: "*Para encontrar el autito los C ayudan mucho, los B ayudan un poco y los A no ayudan para nada*". Esta es la negación misma de las imbricaciones

JAN (6;6) Está casi en el nivel IIA. Comienza por *A* luego *B* y *C*, comparando *A1* con *A2* o bien los *B* por pares, etc., "*porque tú lo pones siempre del otro lado*" o porque "*si no pasó por allá, pasó por el otro*", "*y si la cinta no está allá se sabe que está en el otro*", pero esto no le impide concluir al final que *para abrir la menor cantidad posible de ventanas hay que partir de los C* sin darse cuenta de que en este caso hay ocho ventanas, en tanto que, partiendo de los *A*, basta con abrir tres.

Se constata así que algunas de estas acciones muestran imbricaciones parciales, en tanto otras contienen falsas inferencias. El resultado es que en realidad las posiciones en *G* terminan por ser siempre correctamente ubicadas, pero en calidad de situaciones estáticas y no en tanto resultados necesarios de los trayectos.

3. Niveles II y III

Solo a partir de los 7-8 años (nivel II) la red es considerada en su conjunto y tiende así a constituir un "agrupamiento" operatorio.

Pero los sujetos de este nivel no determinan aún el número mínimo necesario de ventanas que hay que abrir, ni tampoco la posibilidad de tener éxito al constatar únicamente ausencia de cinta, siendo que el sistema es dicotómico en cada una de las subdivisiones. Existen aún algunas inferencias falsas pero que son corregidas rápidamente.

SEB (7;10) "—¿Para encontrar más rápido hay que empezar en *A* o en *C*? —*En A*". Da la serie *A2* → *B3* → *C5*; correcto. "—¿Se puede saber cuántas ventanas hay que abrir para encontrar? —*No, depende*".

BRI (8;6) Da la serie *A2* → *B4* → *C7* (correcto). "—¿Podrías encontrar abriendo menos ventanas? —*No sé*". Luego hace la serie *A2* (vacío) → *A1* → *B2* (vacío) → *B1* → *G2* (vacío) → *G1* (correcto). "—¿Si abres *A1* y no ves la cinta, eso te sirve para saber? —*Sí, quiere decir que pasó por el otro*".

DID (8;2) Pasa de *A1* (vacío) a *B3*. "—¿En cuál *G* puede estar? —*En G5*. —¿Puede estar en otro? —*G6* —¿En otro? —*No, porque pasa por B3 y no puede volver para atrás*. —¿Con cuantas ventanas se puede encontrar? —*Tres*. —¿Se puede con menos? —*Quizás*. —¿Con tres es bastante siempre? —*A veces más*. —¿Es posible sin ver la cinta? —*No es posible porque si no hay cinta en A1, entonces está en A2. Si no está en B3, entonces está en B4 y si no está en C8 entonces está en la otra (C7)*. —¿Entonces es posible saber sin la cinta? —*No, porque no veo dónde está; hay que ver la cinta*. —¿Se puede saber de antemano? —*No*. —¿Si no son tres, cuántas más? —*Cinco*. —Muéstrame una vez más. —*Si no está en B1, entonces está en B3; si no está en B3, entonces está en C7*. —¿Puedes estar seguro con 4 ó 5 ventanas? —*Sí*".

En un nivel ligeramente superior los sujetos afirman la necesidad de comenzar en todos los casos por *A* y también que basta con tres ventanas para encontrar el autito.

YVA (8;11) Hace *A2* → *B4* (vacío) → *B3* → *C6*. "*No, entonces está en C5 porque se ve la cinta en A2 y no allá (B4, etc.); entonces el autito no puede estar en G7 y G8. Pero abrí una puerta de más porque si la cinta no estaba en B4, el autito pasó por B3*. —¿Se puede saber con menos puertas? —*Sí, con una menos*. —¿Y también con menos? —*No, tengo que ver si está en A1 ó A2*".

SAD (8;3) "—*Está en G3 porque pasó por A1 y B2 y no por C4*. —¿Hay que empezar por *A*? —*Sí, siempre, porque cuando se abre en A ya se sabe de qué lado está*. —¿Y si no se ve la cinta? —*Ayuda bastante; si no se la ve también ayuda*. —¿Y si no se la ve después de *A* se puede saber? —*No, no es posible, hace falta verla por lo menos una vez o dos*".

Estos sujetos alcanzan así una necesidad casi completa, a la cual falta aún lo que caracteriza al nivel III: la posibilidad de determinar el camino necesario abriendo solamente las ventanas que se encuentran vacías.

VER (9;9) Comienza por el nivel II, lo que es normal a su edad; sigue continuamente el orden *A, B, C*. Pero a partir de la pregunta "—¿Habrías

podido tomar otro camino para llegar allá?", solamente da reacciones del nivel III: "*—No, estaba obligada.* —¿Con cuántas ventanas lo sabes? *—Con tres.* —¿Por qué? *—Porque un camino es éste (A2), otro son estos dos* (*B3* o *B4*) *y otro es éste* (uno de los *C*). —¿Es forzoso abrir tres? *—Sí, tres es obligatorio.* —¿El orden es importante? *—Es obligatorio empezar por A* (muestra los *A*). —¿Y cuando no hay cinta? *—Es que el autito pasó por el otro camino*".

CAT (10;3) "*—Si se abre A1 y no se ve nada, el autito pasó por A2. Si se abre B3 y no se ve nada, entonces pasó por B4 y si no hay nada en C7 entonces pasó por C8. Con tres es siempre suficiente.* —¿Si se ve algo, eso ayuda? *—Sí.* —¿Y si no se ve nada? *—Sí*".

CRI (11;1) "—¿Cuando se ve la cinta, eso ayuda? *—Sí.* —¿Y si no se la ve? *—Sí, quiere decir que si no está de este lado, está del otro.* —¿Ayuda lo mismo? *—Sí*".

STE (11;8) En el caso en que no se ve la cinta: "*—Si se salta un agujero aquí* (un *B*), *así no ayuda; si se va en el orden, eso ayuda.* —¿Es posible encontrar *G* sin haber visto nunca la cinta? *—Sí.* —Curioso, ¿no? *—No, hace falta* (= basta con) *ser lógico.* —¿Seguro? *—Sí*".

DAC (12;11): tres ventanas son necesarias "*porque hay tres segmentos*" y "*es siempre una especie de contrario*" (= dicotomía). "—¿Y si no vemos la cinta? *—Es como si dejara una mancha blanca*".

PHA (12;2) "—¿Y si no vemos nunca la cinta? *—Sí, se puede encontrar abriendo tres ventanas*".

Esta necesidad —negativa, en cierto modo— es entonces lo que es más difícil de admitir para los sujetos, pero es el criterio según el cual han llegado a concebir la totalidad del sistema como un conjunto de dicotomías que proveen las razones de los puntos de llegada en *C* y *G* sin contentarse con constataciones inferenciales o semiinferenciales y semiempíricas. Ahora bien, ese sistema es un "agrupamiento" aunque espacial (infralógico) que no se refiere a una clasificación de objetos discretos sino a filiaciones de trayectos. Pero en tanto "agrupamiento" plantea un problema: la construcción de las clasificaciones está operatoriamente lograda hacia los 7-8 años con la comprensión de las inclusiones y su cuantificación ($B > A$ y $B > A'$ si $B = A + A'$), en tanto que, en el presente caso, el agrupamiento solo es logrado operatoriamente hacia los 10-12 años. La razón de esto es clara e instructiva. Las clasificaciones que se logran hacia los 7-8 años están construidas por el sujeto según un orden ascendente: de lo particular a lo más general bajo la forma $A + A = B$; $B + B' = C$; $C + C' = D$; etc., donde los símbolos "+" designan conjunciones obligadas. Por el contrario, en el caso que nos ocupa ahora las operaciones solicitadas al sujeto consisten en reconstrucciones de órdenes descendentes: $D = C$ o C'; $C = B$ o B'; $B = A$ o A'; lo que consiste en reemplazar las conjunciones "+" ("*y*") por las disyunciones sucesivas "*o*". La razón de este gran desfasaje entre los "*o*" y los "*y*" es entonces, según parece, que en la construcción de un agrupamiento uno se

limita a agregar nuevos elementos —ya sea en las clases ya establecidas, o bien en una más general que engloba a las precedentes— en tanto que en marcha descendente (que reposa sobre los "o. . .o") se trata constantemente de razonar sobre "posibles", considerando cada etapa del sistema.

4. Conjunciones, disyunciones y operaciones binarias

Resulta claro que mucho antes de la comprensión del sistema total de trayectos aquí presentados, los sujetos son capaces de algunas disyunciones locales, o sea de utilizar los "o" en algunas situaciones particulares. De la misma manera, en las pruebas del capítulo I, el niño que había sacado al perro de su caja puede también dirigirlo hacia la izquierda o a la derecha antes de atraerlo hacia sí. Se trata entonces de combinaciones eventuales y limitadas entre los "y" y los "o" * que pueden tomar formas isomorfas a las 16 operaciones binarias de la lógica de las proposiciones de un sistema de conjunto. No se trata de hecho más que de coordinaciones momentáneas de acciones, que hacen intervenir a la vez los "y" y los "o" con la posibilidad de exclusiones tanto como implicaciones positivas. Tales coordinaciones locales de aparición precoz, se multiplican por supuesto al nivel de los "agrupamientos", en los cuales, según la dirección de las inferencias, tenemos, para $B = A + A'$, la implicación: si x es un B es forzosamente "o" un A "o" un A'.

Veamos algunos ejemplos.

Por supuesto, nuestros trayectos reposan sobre implicaciones del tipo $B1 \rightarrow A1$ en donde la flecha $\rightarrow$ (símbolo de la implicación) expresa el hecho de que el pasaje por $A1$ es una condición previa de su continuación en $B1$, en tanto que la implicación recíproca $A1 \leftarrow B1$ indica que el pasaje por $B1$ es una de las consecuencias de $A1$.

Por el contrario, no hay implicación ($p.\bar{q}$ para $\overline{p \rightarrow q}$ y $\bar{p}.q$ para $\overline{q \rightarrow p}$) en las relaciones entre $B1$ y $C5$; etc.

Las vinculaciones binarias más frecuentes son las conjunciones "y" en orden ascendente y las disyunciones exclusivas "o" (si p w q) en orden descendente.

Las disyunciones no exclusivas ($p.\bar{q} \vee \bar{p}.q \vee p.q$) se observan por ejemplo en el caso en que un sujeto ha seriado tres elementos $A < B < C$ (tripletes que pueden ser muy precoces) y donde el sujeto ve bien que si A es el único más pequeño que los otros y C es el único mayor, el "intermedio" B es a la vez $<$ y $>$.

Hay incompatibilidad ($p.\bar{q} \vee \bar{p}.q \vee \bar{p}.\bar{q}$) entre los pares de garajes $G5$, $G6$ y los pares $G7$, $G8$ que pueden escribirse $p.\bar{q} \vee \bar{p}.q$, siendo en ese caso los $G1$ a $G4$ ni p ni q ($= \bar{p}.\bar{q}$).

La negación conjunta puede entonces presentarse muy precoz-

* Incluidas naturalmente las exclusiones o negaciones.

mente: en el caso de los instrumentos del capítulo I, cuando el sujeto comprende cómo atraer hacia sí al animal deseado, excluye por ese mismo hecho las dos acciones de empujar y de desplazar lateralmente, o sea, $\bar{p}.\bar{q}$.

Hay que hablar de "equivalencia" ($p.q$ w $\bar{p}.\bar{q}$) cuando el sujeto comprende que la situación de dicotomía (como dice *Jan* de 6 años: "Tú pones siempre del otro lado") se mantiene idéntica a través de todas las subdivisiones.

Se puede hablar de "tautología" cuando el sujeto considera como evidente (sin tener necesidad de expresarlo) que la cinta está en *B1* y no en las otras, o en *B2* y no en las otras, o en *B3*, etc., o en *B4*; etc.

Por el contrario, la vinculación "nula" (= siempre falso) solo consiste en contradicciones a ser evitadas, cosa a lo cual no siempre escapa el niño (por ejemplo, en las conductas preinstrumentales, cuando los niños más pequeños no efectúan sino desplazamientos erróneos sin lograr atraer hacia sí).

Quedan las vinculaciones "afirmaciones" o "negaciones" de *p* independientemente de *q* (o sea $p.q \vee p.\bar{q}$) o de *q* independientemente de *p*; pero son obvias a cualquier edad y no es entonces necesario hablar de ellas.

Se ve así cómo, independientemente de cualquier sistema de conjunto —los que solo se hacen posibles en el nivel de las operaciones formales propias al pensamiento hipotético-deductivo y al grupo INRC— se encuentran desde los niveles elementales coordinaciones parciales y a veces apenas momentáneas que presentan formas comparables a las 16 operaciones binarias de la lógica clásica. Este hecho es importante desde el punto de vista de una lógica de las significaciones al mostrar que desde el comienzo las "formas" son en parte dependientes de los contenidos siendo, al mismo tiempo, necesarias para su asimilación.

La segunda consecuencia importante de esta investigación es el mostrarnos que una de las condiciones esenciales e incluso constitutivas del pensamiento formal (nivel III) es el poder tardíamente adquirido para coordinar de modo sistemático y permanente los "y" y los "o", o sea, las dos vías ascendente y descendente susceptibles de recorrer un sistema dado.

III. El mosaico

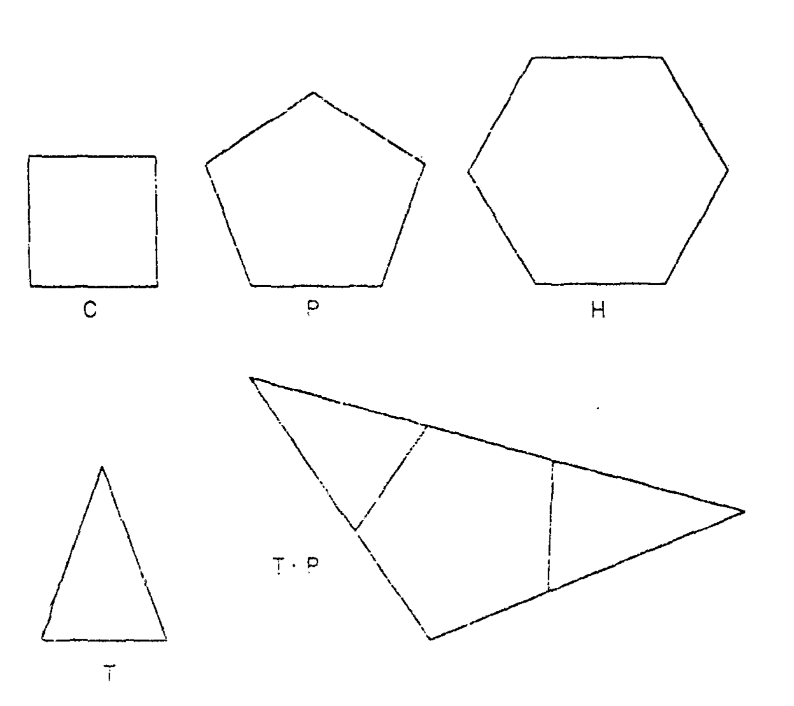
con la colaboración de B. Vitale y M. Zinder

Volvamos a las implicaciones entre acciones. La investigación que vamos a ver ahora presenta el doble interés de referirse tanto a un problema práctico como a combinaciones de formas geométricas. El problema práctico consiste en pedirle a los sujetos que cubran el piso con un mosaico tal que no quede ningún hueco o espacio vacío entre las piezas y que sea posible continuar indefinidamente el ensamble construido inicialmente en dimensiones reducidas. Las piezas son de forma geométrica variable: cuadrados *C* (amarillos), pentágonos *P* (azules), hexágonos *H* (rojos), triángulos isósceles *T* (blancos). Los *C*, los *P* y los *H*, (como la base de *T*) tienen lados de idéntica longitud (8 cm); los ángulos de *T* están calculados de tal manera que esta forma *T* puede prolongar a *P* sobre uno de sus lados. Todas estas figuras quedan a disposición del sujeto quien puede entonces disponerlas como prefiera: puede utilizar solamente elementos de la misma forma (un mosaico compuesto únicamente de cuadrados *C* es lo más fácil de construir sin dejar huecos, en tanto que utilizando únicamente los pentágonos *P* esto no es posible); también puede mezclar las formas de diversas maneras (por ejemplo, cubriendo por medio de los triángulos *T* los intervalos que quedan al reunir los pentágonos).

Es posible entonces analizar dos tipos de implicaciones entre acciones. Las primeras se refieren únicamente a las anticipaciones de lo que resulte de los ensambles de figuras semejantes; por ejemplo, prever que yuxtaposiciones de cuadrados darán mosaicos sin huecos y, sobre todo, prever que si esto es posible sobre una pequeña superficie se puede continuar de la misma manera indefinidamente, en tanto que los pentágonos yuxtapuestos dejarán huecos y que esto no cambiará para nada si yuxtaponemos un mayor número de dichas figuras.

Pero hay otras formas de inferencias más interesantes: ¿es posible hacer un mosaico completo con cuadrados únicamente sin

Figura 3



triángulos (lo que anotaremos como $C.T$) o solamente con $\overline{T}$ sin C (o sea $T.\overline{C}$)? ¿Es posible combinarlos? En este caso se presentan las siguientes relaciones: $(T \,.\, \overline{C}) \vee (C \,.\, \overline{T}) \rightarrow (T \,.\, C) = E$ (éxito) y análogamente $(T \,.\, \overline{P}) \vee (\overline{T} \,.\, P) \rightarrow (T \,.\, P) = E$, mientras que $(C \,.\, \overline{P}) \vee (\overline{C} \,.\, P) \rightarrow (C \,.\, P) = \overline{E}$ (fracaso). ¿Significan estas inferencias que el sujeto, habiendo logrado construir un mosaico con los T únicamente, o bien con los C únicamente, concluye que podrá hacer un mosaico sin huecos con los T y los C combinados? O bien, si lo logra con los $T \,.\, P$ reunidos ¿prueba esto acaso que podría hacerlo con los P solamente —lo que no es cierto— o con los T solamente, lo cual es fácil? Y si los $T \,.\, P$ son posibles, ¿conduce esto al éxito con $C \,.\, P$, lo cual está excluido? En esos casos las inferencias se refieren a las combinaciones y sus relaciones con los ensambles homogéneos (solamente x) lo cual supone anticipaciones más complejas y tardías.

Por otra parte, va de suyo que reencontraremos en esta investigación las 16 operaciones binarias de las que nos hemos ocupado en el capítulo precedente.

En cuanto a los niveles, solamente distinguiremos tres cuyos criterios son claros.

1. Nivel I

Los sujetos de este primer nivel solamente logran construir mosaicos sin huecos con cuadrados y ni siquiera llegan a inferir que se podría continuar indefinidamente, fracasando en esta recurrencia elemental.

NAD (6;7) reúne 6 cuadrados en un rectángulo: "*—Así se puede hacer.* —¿Puedes seguir agregando sin dejar huecos? *—No, me parece que no* (agrega cuadrados sobre el lado más largo). —¿Entonces puedes continuar? *—Sí* (llega a 12). *Se puede seguir así y hacerlo más grande todavía.* —¿Tan grande como quieras? *—No*". "—Si pones dos así (un cuadrado encima de otro formando un rectángulo). ¿Cómo los llamas? *—Un triángulo porque tiene una altura.* —¿Cómo sabes (si una figura) es un cuadrado? *—Porque tiene la forma de un cuadrado.* —¿Y así? (un rectángulo de 5 × 6 que ella construyó). *—No del todo*". Con hexágonos y tres cuadrados la niña hace una larga serpiente, luego flores con huecos triangulares entre los pétalos; muestra uno de esos huecos y dice: "*—Después quiero hacer* (= poner) *algo aquí.* —¿Podrías llenar todos esos huecos? (solamente hay cuatro). *—Nunca se podrá hacer; siempre habrá huecos*".

DAN (6;8) comienza por una bella corona de 10 *P* juntados por sus lados, dejando así un amplio hueco en el interior de esta figura; intenta cubrir el hueco con tres piezas. "*—No, no se puede porque esto y esto* (muestra los huecos restantes) *no tienen esta forma*". Alinea entonces 17 *P* en dos filas paralelas y separadas por un espacio en el cual ubica todavía 9 *P*. "*—No se puede*". Se niega a emplear elementos de otras formas (*H*) pero luego hace un nuevo mosaico utilizando únicamente *H* y constata que funciona "*porque tienen todos la misma forma*" lo cual es contradictorio con lo que admitía para los *P*. "—¿Y con los dos? (*P* y *H* juntos). *—Con los H sí pero con los P no*". Construye rosáceas con un *H* en el centro rodeado de *P* y concluye que "*no se puede cubrir.* —¿Por qué *—Porque esto* (*H*) *no es cuadrado*".

COR (7;9) Se aproxima al nivel II pero sin sobrepasar suficientemente las dificultades del nivel I. Comienza con los *C* y un mosaico rectangular de 18 elementos. "—¿Se podría continuar? *—Quizás sí, a veces no.* —¿Por qué?" Agrega a su rectángulo un apéndice vertical de 3 *C* y un horizontal de 3 *C*, luego los junta a la figura inicial pero con desfasajes de posiciones tal que un lado de los cuadrados pegados no corresponde más que a dos semilados de la figura central. Luego, con los *H* reacciona como *Dan* y con una mezcla de *C* y de *H* solamente logra superficies o alineamientos muy irregulares.

Estas reacciones iniciales son notables por la falta de anticipaciones que se muestra todo a lo largo del interrogatorio, a tal punto que se podría suponer que esos sujetos no han comprendido la consigna de suprimir todos los huecos, lo cual no es para nada cierto. El ejemplo más curioso es el de los cuadrados porque, si bien es evidente que a los 6 años el niño comprende la posibilidad

de prolongar cualquier serie lineal (tal como $n \rightarrow n + 1$), *Nad* e incluso *Cor* parecen bloqueados frente a la idea de agrandar sin fin una superficie tan simple y sin huecos como un conjunto de cuadrados yuxtapuestos de manera regular en las dos dimensiones. Por otra parte, aun haciendo el proyecto de "poner algo allí" —en 4 pequeños huecos triangulares— *Nad* concluye perentoriamente "nunca se podrá hacer; siempre habrá huecos". Sin perder de vista que la finalidad es un mosaico, una reacción extraña es comenzar por una larga serpiente, etc. En pocas palabras, lo propio de este nivel I es el empirismo con el que se contentan los sujetos, con un mínimo de inferencias, casi todas injustificadas, como cuando *Dan* piensa que rodeando un *H* de cuadrados eso cubriría mejor la totalidad que con los *P*.

2. Nivel II

Desde los 7-8 años en promedio, asistimos a ciertos progresos inferenciales y a ciertas combinaciones de elementos de formas diferentes.

PAU (6;9) comienza haciendo una flor: un *H* rodeado por *T* apoyados sobre su base; pero para saber si puede continuar saca los *T*. "—¿Se puede continuar así? —*Sí.* —¿Cómo lo podrías explicar? —*No sé pero estoy segura".* (Agrega aproximadamente 50 piezas): "*Es seguro ahora que se puede seguir, ¿ves?".* En seguida junta alrededor de 24 *T* en una figura irregular pero sin huecos, luego arregla algo mejor las piezas. Con los *T* hace una gran corona y para llenar el espacio vacío interior reemplaza los *H* por *T* dispuestos en círculo, con los vértices concéntricos.

XAV (7;5) comienza con los *T* únicamente en una forma de conjunto irregular, y llena los huecos con otros *T* sin ocuparse de la figura total que consigue formar. Concluye que "*podría siempre continuar así. Creo que no habrá huecos porque así queda junto.* —¿Se podría cubrir toda la habitación? —*Sí, es posible hacer así toda la habitación*". Cambia entonces de forma de conjunto y construye una bella rosácea de 8*T* cuyos vértices están reunidos en un mismo centro, pero enseguida hace su autocrítica cuando se le pregunta si se podría siempre llenar los huecos: "—*No se llenan cuando es redondo* (en la medida en que se está inserto en un espacio cuadrado como es la habitación). *Se podría hacer un cuadrado más grande* (junta 15*C* en un gran rectángulo y dice que así se podría continuar). —¿Y con los *C* y los *T*? —*No, no se puede".* Sin embargo lo hace yuxtaponiendo por uno de sus ángulos dos cuadrados de 4 y adornando los intervalos con *T* bien juntos.

BEA (7;10) no cubre los huecos dejados por los *P* en forma de corona en tanto que con *H* ve de inmediato que "*se puede seguir, seguir*". Después de haber logrado una forma con *C* y *T* concluye: "*Con los T solos puedo, con los C solos puedo, pero no con los C y los T*" (reunidos).[1] Ella intenta espontáneamente hacer algo con *P* y *C*: una corona

[1] Operación (E = éxito): $[(C \rightarrow R) \cdot (T \rightarrow R)] \rightarrow \bar{R}$ o $[(C \rightarrow R) \cdot (T \rightarrow R)] \not\rightarrow (C \cdot T \rightarrow R)$. Similares operaciones en el caso de *Xav*.

de *P* y en el medio un *C* y algunos *T*; no lo logra, pero sí lo consigue con un *H* y algunos *T*: "*Continuaría siempre así*"

AUG (8;10) hace primero una corona de *P* sin saber cómo cubrir el interior pero luego es el primero en poner 4 *P* lado a lado con un vértice hacia arriba y encima otros con un vértice hacia abajo ubicando luego algunos *T* en los intervalos superiores o inferiores: "*y después se puede seguir*". Con 3 *H* reunidos en arco de círculo ve que el hueco interior del arco tiene también una forma de *H* y dice: "*Se podría seguir bastante; es a causa de la forma*" (mostrando ese lugar vacío. Continuando con los *T* y los *H* dice: "*No sé si se podría hacer; quizás.* —Si se sabe que con los *T* se puede y con los *H* también, ¿no es normal que también se pueda con los dos? —*No es seguro, hay que probar*".

PAC (8;9) Pone 7*H* con *C* pegados a los lados exteriores. Se le pregunta si se puede cerrar: "*No, cada vez que se agrega un C formará otro agujero*".

BEN (9;10) pone 3*H* juntos en una forma triangular y dice, como *Aug*: "*Se puede siempre poner allí porque el agujero tiene la misma forma*" (de *H*).

JOS (9;8) pone 4*P* y 4*T* y dice: "*Aquí se puede continuar con los T*". Y concluye: "*Con los T solos se puede hacer (E), con los P solos no se puede* (no-*E* = correcto), *no se puede con los T y los P juntos* (no-*E* = falso), *con los T y los H no se puede* (no-*E* = falso), *y con los P y los H tampoco se puede* (no-*E* = correcto)"

El interés de estas reacciones es el desarrollo de las inferencias bajo la forma de implicaciones entre acciones que intervienen en la anticipación de las figuras en construcción, o bien en las deducciones acerca de una continuación posible. Sobre el primer punto las anticipaciones de conjunto son escasas y los sujetos prevén, sobre todo viendo los huecos que subsisten, de qué manera van a cubrilos. Sobre el segundo punto, por el contrario, una implicación muy general es que, salvo en el caso de formas circulares subsistentes como tales (*Xav*), toda superficie obtenida sin huecos implica que siempre se puede continuar de la misma manera. En cuanto a las razones para ese prolongamiento posible, *Pau* no sabe encontrarlas pero está seguro. Por el contrario, en el caso de *Aug* y de *Ben*, la razón que descubren, al utilizar solamente los *H*, es que los huecos que subsisten tienen a su vez la forma de *H*. Inversamente, ven bien que los *P* rodeados por cuadrados pegados contra sus lados comunes no cubrirán jamás todo porque "cada vez que se agrega un nuevo *C* se forma un nuevo agujero" (*Pac*). Pero a pesar de esos diversos progresos, las deducciones propias en este nivel siguen siendo insuficientes, en particular cuando se trata de prever las combinaciones de 2 piezas de formas diferentes (lo que ocurre con *Jos*, a pesar de tener 9 años).

3. Nivel III

En este último nivel las inferencias e implicaciones entre acciones juegan un rol decisivo tanto por su rigor como por su fecundidad.

MAC (11;4) Hace dos rosáceas con *T* concéntricos, pero cubre el intervalo que las separa poniendo otros *T*. Se le pregunta si se puede continuar sin dejar huecos: "*—Se puede continuar para tener una superficie indefinida porque siempre se parece y me puedo imaginar que esta superficie es muy grande; se puede demostrar que así se va a hacer infinito.* —¿Por qué? *—Porque llena todo o sea que si se sigue va a ser lo mismo*". Rehace una superficie, esta vez simétrica, y al preguntarle por qué, responde. "*—Todas las formas que tienen un lado recto se las puede doblar en dos partes que hacen los ejes de simetría. Creo que se puede hacer*". Se le dibuja entonces una figura que tiene un contorno aberrante y dice: "*Pienso que se puede hacer*".

CAR (11;4) presenta las mismas reacciones iniciales; luego, con los *P* anticipa de inmediato que es posible llenar los huecos con los *T*, en tanto que utilizando solamente los *P* "*habrá siempre un hueco*". Completa dos *P* superpuestas con 4 *T* y declara: "*Ahí está, hice un paralelogramo y vemos que en ese caso se puede continuar.* —¿Podrías saber de antemano que había una solución o la descubriste? (*T* . *C* . *P*, que acaba de encontrar) *—Se puede saber*" (e indica por qué).

ARC (11;6) Después de una mezcla de *P* y de *T* declara: "*Sería irregular, pero puede ser posible seguir así* (sin huecos). —¿Y poniendo además los *C*? *—Pienso que sí; más bien, estoy seguro*". Sin embargo prefiere una forma regular y al obtener un paralelogramo se siente reasegurado: "*Yo sé que con un paralelogramo se puede hacer una superficie infinita; lo mismo con los C solos, y luego con los H*". Si se mezclaran todas las formas piensa que "*sería un poco difícil pero se puede midiendo los ángulos* (que son más obtusos o agudos según los huecos); *con los P solos no se puede*".

ANI (12;2) también comienza con los *P* y los *T*, pero aunque afirma la continuación posible agrega que "*es siempre molesto porque siempre hay que poner algo* (= hay que agregar en los huecos), *pero siempre un poco enredado; no se puede probar nada*". Intenta entonces, como *Arc*, formar totalidades regulares; aun reconociendo que se puede "*continuar siempre mezclados*", está encantada al obtener un paralelogramo: "*por fin hace una superficie* (regular). *Se ve que se puede agregar hasta el infinito, pero allí no sé* (demostrarlo). *Es molesto; siempre puedo agregar algo, pero eso me molesta, no es una ley regular, se agrega no importa cómo*".

Esos casos de nivel superior son interesantes por sus exigencias. Por supuesto, ellos admiten que una vez encontrada una superficie limitada sin huecos, incluso si la han descubierto por anticipaciones parciales (y paso a paso, en función de las constataciones) será siempre posible reproducirla indefinidamente completando los puntos de contacto, o incluso simplemente agrandar sin límites la superficie inicialmente construida. Es lo que dice *Mac:* "se puede demostrar que así se va a hacer infinito", es decir por simple iteración de las "semejanzas". Pero se siente un poco más satisfecho si puede conferir a sus figuras ejes de simetría, o sea un comienzo de regularidad que hace más plausibles las iteraciones por semejanza. Con *Car* la necesidad de regularidad se hace patente: al llegar a los "paralelogramos" la continuación se hace no solamente segura sino también demostrable, lo que es netamente más fuerte, y las variaciones de forma de los huecos pueden ser compensadas por

variaciones complementarias de los ángulos. Finalmente, en los casos de *Arc* y de *Ani*, aparecen netamente las diferencias entre las formas regulares con las que se puede deducir con necesidad las "superficies infinitas" posibles, en tanto que con superficies irregulares con ajustes variables la continuación permanece segura pero solamente se trata de un "enredo molesto" (*Ani*) por oposición a las demostraciones simples.

4. Conclusiones

Uno de los puntos interesantes de esta investigación es la evolución clara de los tres tipos de inferencias que caracterizan a los tres niveles que hemos distinguido. En el nivel I, anticipaciones limitadas a lo que permiten las repeticiones constatables de arreglos o de modificaciones ya constatadas empíricamente; en el nivel II, inferencias que se refieren a anticipaciones que sobrepasan lo constatable y están fundadas sobre implicaciones necesarias pero sin proveer aún sus "razones"; en el nivel III, inferencias fundadas sobre esas razones o sobre demostraciones posibles.

I. En el nivel I, en efecto, las dos implicaciones entre acciones se reducen a las siguientes: 1) una laguna entre las piezas no puede (o no debe) ser llenada sino por un elemento de la misma forma del hueco a llenar (*C* o *H*, etc.); y 2) la construcción de una figura de conjunto una vez acabada en su espacio limitado puede ser agrandada: "se puede continuar así haciendo aun más grande" (*Nad*) o "puede ser, sí, pero a veces no" (*Cor*). Por el contrario, lo que no se puede realizar es hacer "tan grande como quieras": *"No"* responde con convicción *Nad* como si "continuar así" tuviera límites y "hacer aun más grande" no implicara una iteración posible indefinida sobre el modelo de $n \rightarrow (n + 1)$ de la serie de los números naturales. La razón de esta limitación es evidentemente que la recurrencia "siempre" no es constatable y que el sujeto no razona o no infiere aun más que sobre un universo de objetos empíricos. Ya hemos visto en otros trabajos que, al pedir a los sujetos de este nivel que coloquen sucesivamente n y luego $n + 1$ objetos con una mano en un recipiente transparente, mientras hacen lo mismo con la otra mano en un recipiente que no es visible, están seguros de haber llegado a una igualdad en esos dos recipientes, pero no es en modo alguno seguro que la igualdad se mantendría si se continuara así "hasta la noche".

En el nivel II esta continuación ilimitada es inferida no solamente como posible sino incluso como necesaria, aunque sin demostración. Cuando *Pau* afirma: "yo no sé pero estoy segura" quiere sin duda decir "no puedo demostrarlo ni justificarlo, pero me resulta una evidencia necesaria que la continuación paso a paso implica que sea ilimitada". Esta afirmación recuerda la expresión de un

pequeño que hemos citado a menudo: "cuando se lo sabe por una vez se lo sabe para siempre", en otros términos, la implicación entre acciones está aquí fundada sobre una abstracción reflexiva y ya no se limita, como en el nivel I, a extraer las consecuencias lógicas de abstracciones empíricas: "si he podido hacer ese ensamble sin huecos, puedo agrandarlo".

Finalmente, en el nivel III, el sujeto distingue entre lo que *Ani* llama "un enredo molesto" (que se puede con toda seguridad prolongar indefinidamente pero sin poder deducir los detalles porque "se agrega no importa cómo") y lo que ella llama una "superficie", es decir, una forma de conjunto regular simple. Ella descubre, en efecto, que puede construir "un paralelogramo: ¡por fin así hace una superficie!" queriendo expresar así la posibilidad de una iteración demostrable por un juego de contactos fáciles de deducir. Esta búsqueda de las regularidades se hace visible cuando *Mac* busca a todo precio los ejes de simetría, incluso en la forma de conjunto aberrante propuesta por el adulto y se prolonga con *Car* o *Arc* quienes, como *Ani*, construyen paralelogramos (de los cuales *Arc* dice: "yo sé que con un paralelogramo se puede hacer una superficie infinita").

Se pueden distinguir así tres formas de implicaciones entre acciones. La primera puede ser llamada *condicionante* ya que se refiere a las condiciones necesarias y suficientes para la acción exitosa que consiste en encontrar elementos que tengan casi exactamente las formas del hueco para llenar. Se las observa desde el nivel I, lo que permite al sujeto estar seguro de poder "agrandar" o repetir lo que acaba de hacer, pero eso no lo autoriza a generalizar al infinito porque uno nunca sabe lo que puede llegar a ocurrir.

La segunda forma de implicaciones puede ser llamada *amplificante* en tanto que se refiere a las consecuencias de lo que ha comenzado. Es lo que se produce en el nivel II y puede explicarse así: "si logro agrandar lo que encontré, no hay razón de no poder continuar siempre" como dice *Xav*.

La tercera forma puede ser llamada *justificativa* y provee las "razones" que permiten la iteración indefinida. Esas razones son provistas por una demostración fácil en el caso de formas de conjunto regulares (las "superficies" de *Ani* por oposición al "barullo" inicial).

II. Pero además de esos tres tipos de implicaciones que en principio son todas justificadas, se puede distinguir lo que llamaremos *implicaciones supuestas* o *débiles* cuando reposan sobre informaciones incompletas pero que parecen, sin embargo, lógicamente válidas. El caso típico de esas inferencias es aquel en el cual, conociendo lo que se puede obtener haciendo intervenir solo formas x o solo formas y, se pide al sujeto prever lo que dará una reunión de formas de x e y, o sea, $x \cdot y$ actuando conjuntamente sin aportes suplementarios de una tercera forma z. En ese caso supongamos

formas *C* cuyas reuniones dan una superficie sin huecos y formas *P* cuyas reuniones son lacunarias; es bastante lógico prever que la reunión *C* . *P* será también lacunaria. Pero en el caso paradojal en que los *C* solos dan algo logrado (*E*) y los *H* solos también conducen al logro *E*, el sujeto es llevado a creer que *C* . *H* debería también a fortiori, tener éxito, en tanto que de hecho los cuadrados *C* ubicados sobre los lados rectilíneos de un hexágono *H* dejan sin llenar lagunas triangulares, siendo el éxito posible solamente con la asociación ternaria *C* . *H* . *T*. En ese caso la implicación $C . H \rightarrow E$ es únicamente supuesta a pesar de su apariencia lógica, mientras no se obtengan informaciones suplementarias, ya sea por constatación o por anticipaciones.

Esas "implicaciones supuestas" varían entonces según los niveles que hemos distinguido. En el nivel I, cuando el sujeto tiene tendencia a construir únicamente mosaicos homogéneos, sin coordinación de formas, el problema no se plantea y cuando se lo planteamos al sujeto (tal como lo hicimos con *Dan* preguntándole sobre lo que ocurre poniendo "*P* y *H* juntos") responde considerando cada uno de ellos por separado.

En el nivel II encontramos una mezcla de respuestas falsas con respuestas correctas y con rechazos a extraer conclusiones. Por ejemplo, *Bea* (7;10) dice que utilizando los *T* solos tiene éxito (*E*), igualmente con los *C* solos, pero prevé que con los *C* y con los *T* reunidos no podrá hacerlo (No-*E*), lo que es falso. *Aug* (8;10) se equivoca o suspende su juicio: "con los *T* únicamente, o únicamente con los *C* se puede hacer, pero combinando los *C* y los *T* no va a funcionar". Se le pregunta qué ocurriría combinando los *T* y los *H* y responde: "no sé si se podría hacer; quizás. —Si se sabe que con los *T* se puede y con los *H* también, ¿no es normal que también se pueda con los dos (juntos)? —No, no es seguro; hay que probar". Por su parte, *Jos* (9;8) da un conjunto de respuestas correctas y erróneas: se puede hacer con los *T* solos, no se puede con los *P* solos y tampoco con los dos juntos (no-*E* = falso), tampoco se puede con los *T* y los *H* (falso) y "con los *P* y los *H* tampoco se puede" (correcto).

Solamente en el nivel III se resuelve el problema y *Car* llega incluso a una composición ternaria *T.C.P* diciendo que se podía prever deductivamente y mostrando el detalle de lo que lo hubiera permitido. El interés de este nivel III en cuanto al problema de las implicaciones supuestas exactas o no fundadas es que, a partir de este nivel, el sujeto tiene tendencia a centrarse de inmediato y a menudo continuamente sobre las relaciones entre dos, tres o cuatro figuras más bien que en formas aisladas consideradas como una especie de absoluto. Esta relativización juega, naturalmente, un gran rol en la búsqueda de las demostraciones o de las "razones".

III. Sólo nos queda hablar de las operaciones que se refieren a las significaciones en juego y que son isomorfas a las 16 relaciones

interproposicionales. A este respecto, señalemos de inmediato que no hay diferencias entre las significaciones de los objetos y las de las acciones. Ya que se proponía al sujeto la finalidad general de obtener un mosaico sin huecos, la significación de las acciones consiste en logros o fracasos y se funda, pues, sobre los resultados de esas manipulaciones. En cuanto a los objetos, sus significaciones equivalen como siempre a expresar "lo que se puede hacer con ellos", lo que equivale en todos los casos a referirse a las acciones ejercidas sobre ellos. Se las puede clasificar según sus formas, y es por ello que comienza *Nad* en el nivel IA; se las puede seriar según el número de sus lados (3 para *T* y así siguiendo hasta 6 para *H*), lo que está implícito en todos los niveles. Pero, en el presente contexto, su significación específica consiste en posibilidades o imposibilidades de lograr el mosaico solicitado. En este caso resulta que las relaciones efectuadas o intentadas por el sujeto son isomorfas a las 16 operaciones interproposicionales conocidas, lo que no tiene nada de sorprendente ya que se trata de una combinatoria elemental, donde los únicos "valores de verdad" en juego en los enunciados del sujeto consisten en describir lo que ha hecho y por qué razones ha tenido éxito o ha fracasado.

Es posible distinguir las cuatro operaciones que expresan la independencia de p, de q o de sus negaciones cuya notación habitual es $(p . q \vee p . \bar{q})$, $(\bar{p} . q \vee \bar{p} . \bar{q})$, $(p . q \vee \bar{p} . q)$ y $(\bar{p} . \bar{q} \vee p . \bar{q})$; es el caso cuando el sujeto trata de construir un mosaico con una sola de las cuatro formas, sin vincularlas con las otras, lo que conduce al éxito con *T, C* y *H* pero conduce al fracaso con *P*.

En segundo lugar están las conjunciones $(p . q)$ que comportan dos formas diferentes desde el punto de vista de las significaciones: las conjunciones "libres" tales como $T . C$, formas que dan lugar a logros tanto juntas como separadas, y las conjunciones "obligadas" tales como P . T, de las que un sujeto del nivel III dice que, si se ha logrado lo que se busca al utilizar los *P* es porque "en todo caso se han tomado (además) los *T*".

En tercer lugar, se encuentra el equivalente de las disyunciones exclusivas o exclusiones recíprocas en el caso $H . C$ que, por sí solas, sin una tercera forma, sólo conducen al fracaso, y las disyunciones no exclusivas o trilemas [cf.$(p . q \vee p . \bar{q} \vee \bar{p} . q)$ en el caso $(T . \bar{C}) \vee (\bar{T} . C) \vee (T . C)$].

Finalmente, resulta claro que también se pueden observar equivalencias, etc., así como las correspondientes a las operaciones ternarias, pero solo se trata de combinaciones de acciones con sus significaciones y no de proposiciones en un sentido extensional, incluso si el sujeto traduce lo que "hace" con enunciados correctos.

IV. Implicaciones y significaciones aritméticas

con la colaboración de I. Berthoud y H. Kilcher

Las implicaciones entre acciones juegan un rol especial —tal como lo hemos expuesto en los capítulos I a III— cuando los objetos considerados son en parte exteriores al sujeto y cuando el problema que debe ser resuelto es relativo a una finalidad y, en consecuencia, solo comporta éxitos o fracasos prácticos. Corresponde preguntarse ahora qué ocurrirá cuando los objetos en juego sean seres creados por los sujetos, tales como los números, y cuando las preguntas planteadas sólo den lugar a respuestas traducibles en términos de "correctas" o "falsas", o sea de valores de verdad. ¿Será necesario entonces admitir que las únicas implicaciones en juego sean implicaciones entre enunciados, o bien que éstos se limiten a describir o formular verbalmente un conjunto de operaciones cuyas implicaciones constituyen la fuente verdadera e indispensable de lo que los enunciados traducen en el plano de la comunicación?

Este capítulo aborda pues un problema esencial para nosotros y que tiene incluso una relevancia epistemológica general. Si se distingue —tal como se debe— las matemáticas "intuitivas" en el plano de la invención y las matemáticas "axiomatizadas" en el plano de las demostraciones más elaboradas, conviene naturalmente preguntarse qué rol juegan, en el seno de las primeras, las implicaciones entre operaciones y qué es lo que ocurre en el seno de las segundas. De la misma manera, si no nos limitamos a dar al término "constructivismo" el sentido limitado que le otorga Brouwer, resulta claro que las matemáticas intuitivas consisten en construcciones continuas de operaciones y que las relaciones entre éstas comportarán innumerables implicaciones entre sus significaciones. En las páginas que siguen estudiaremos la génesis de algunos ejemplos elementales de esas coordinaciones.

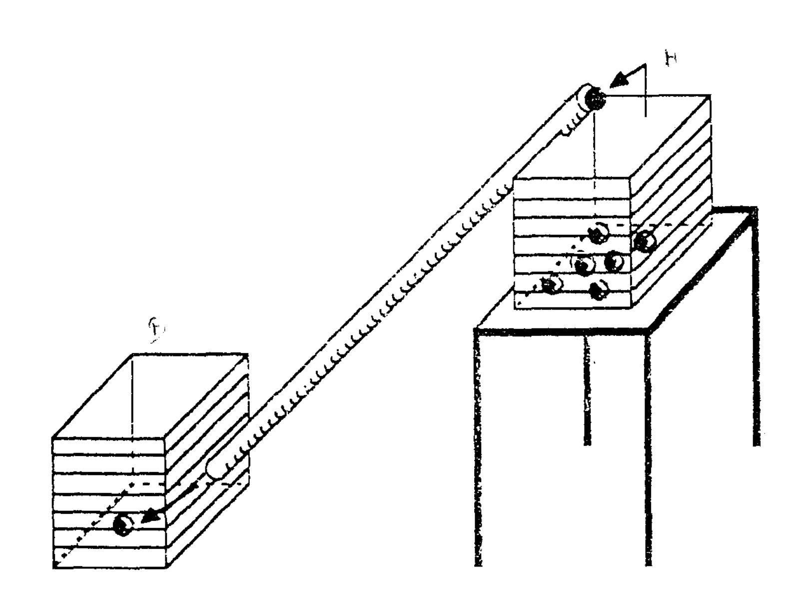
Este capítulo tiene dos secciones. La primera parte se refiere a las relaciones entre los números ordinales y los cardinales, así como a las implicaciones mutuas que los vinculan. La segunda

parte analiza algunas condiciones previas y necesarias para cualquier enumeración sobre todo el orden circular.

SECCIÓN I
NÚMEROS ORDINALES Y CARDINALES

El dispositivo utilizado consisté en dos cajas situadas a alturas diferentes; la caja superior (*H*) está vinculada a la caja inferior (*B*) por un tubo opaco que permite hacer descender una a una las bolitas de *H* hacia *B*. El aspecto ordinal concierne entonces a los elementos que pasan de *H* hacia *B*, que están ordenados en función de la *sucesión temporal* de las caídas, en tanto que el aspecto cardinal está constituido por el número de elementos que permanecen en *H* o que están reunidos en *B* después de cada caída, y se refiere entonces a los *estados* en *H* y en *B* antes de cada caída, en el momento en que cae la enésima bolita, al final del pasaje, etc. Resulta claro que los cardinales en *H* y en *B* son complementarios

Figura 4



con respecto al número total de bolitas $T = H + B$. Las preguntas pueden plantearse en anticipación, antes de los pasajes, o en reconstitución, después de éstos, y por supuesto, el contenido de las cajas permanece invisible.

Distinguiremos dos situaciones experimentales. En la primera, el total T es al comienzo de 11 bolitas en H y cero en B (este total es menor que 11 para los niños más pequeños). En anticipación se pregunta: "antes que caiga la quinta bolita, ¿cuántas habrá en B y en H?" En realización se dice: "vas a dejar caer las bolitas una por una y te detienes antes que caiga la quinta". Después de la acción del sujeto se ocultan H y B y se plantean las mismas preguntas sobre los cardinales en H y B. En esta primera situación, el niño debe entonces inferir los cardinales a partir de informaciones ordinales.

En la segunda situación, el total T de bolitas al comienzo es de 15 en H. En anticipación se dice: "vas a dejar caer 10 bolitas una por una de H hacia B; ¿la cuarta estará en B o en H?, ¿y la séptima?, ¿y la décima?; ¿cuáles bolitas estarán en H?, ¿la decimotercera?, ¿cuáles otras?" En realización se dice: "vas a dejar caer 10 bolitas en B". Después de esa acción se ocultan H y B y se plantean las preguntas sobre la pertenencia de los ordinales a cada una de las cajas. Aquí se trata, pues, de inferir esas pertenencias a partir de informaciones cardinales, o sea, de implicaciones recíprocas de aquellas necesarias en la primera situación.

Hemos podido distinguir cuatro niveles.

1. Nivel IA

Veamos ejemplos del primer nivel, caracterizado por la dificultad para disociar el todo T en subconjuntos complementarios B y H, particularmente en la primera situación.

BRI (5;0) Primera situación, con $T = 8$, en realización: "—Te vas a detener antes que caiga la cuarta. —(La niña hace caer cinco bolitas). —¿Cuántas hay abajo? —. . . —Con la mano has hecho cinco veces esto, ¿cuántas hay entonces abajo? —*Cinco*. —¿Cuántas hay arriba? —*No sé*". Se comienza nuevamente con ocho bolitas: "—Te vas a detener después de la cuarta. ¿Cuántas has puesto ya? —*Tres*. —¿Cuántas quedan arriba? —*Siete*". Se vuelve a iniciar con un total de cuatro bolitas: "—Vamos a parar antes que caiga la tercera. —*Va a haber tres en B*. —¿Y en H? —*Cuatro*". Segunda situación, con $T = 7$: "—Puse cinco abajo. —¿Dónde está la segunda? —. . .".

DAN (5;6) Primera situación. Anticipación: "—¿Cuántas en B antes que caiga la quinta? —*No hay, me parece*. —¿Habrá o no habrá? —*Sí, once*". Es, pues, todo o nada. Realización: se dejan caer cinco bolitas. "—¿Cuántas hay abajo? —*Cinco*. —¿Cómo se llama la que va a caer? —*La seis*. —¿Cuántas hay todavía arriba? —*Seis, no, once*. —¿Por qué dijiste 6? —*Me parece que conté mal*". Segunda situación: $T = 10$; se dejan caer cinco, una por una. "—¿La tercera está abajo o arriba? —*Abajo*. —¿Por qué? —*Porque la pusimos en el tubo*. —¿La quinta? —*Abajo*. —¿La séptima? —*Arriba*. —¿Cuál otra? —*La ocho*". Se retoma

la primera situación con ocho bolitas arriba: "—Nos paramos antes de lanzar la cuarta, ¿dónde está la cuarta? —*En H.* —¿Y cuántas abajo? —*No hay.* —¿Por qué? —*Porque está todo vacío.* —¿Y en *H* —*No sé.* —¿Puedes decir cuántas? —*Más o menos 8, pero no; más o menos 6, no, 10, me parece".*

CAT (5;6) Primera situación, *T* = 10, en realización: "—Vas a dejar caer siete bolitas abajo. —(Las deja caer a todas) *Va a haber siete porque había diez.* —Pero te pido solamente 7. —*No puede nunca haber 7 con 10*". Hay pues indisociación del cardinal total *T*. En cuanto a las acciones, para detenerse antes de la quinta bolita, la niña cuenta *"uno"* para la acción de tomar la primera, *"dos"* para lanzarla en tubo, *"tres"* para la segunda y *"cuatro"* para la tercera, y concluye: *"dejé caer cuatro"*. "—Al principio había 11 en *H*, dejaste cuatro abajo, entonces, ¿cuántas hay arriba? —*Hay diez*".

Todos los sujetos de este grupo IA saben contar hasta 15 o más, y el interés de estas respuestas es la poca utilización que hacen de esta numeración verbal para las cuantificaciones cardinales, e incluso las ordinales. La razón de esto es, sin duda, que en este nivel los nombres de los números "uno, dos, tres", etc., no son aún más que "nombres" momentáneos por medio de los cuales el niño designa, provisoriamente, los elementos individuales homogéneos de una colección cualquiera: "uno" es así el nombre del primer elemento distinguido, "dos" es su sucesor, etc., sin que esos nombres se vinculen con una significación cuantitativa.

De ello resulta que cuando, para un total *T*, se deja caer la enésima bolita de *H* hacia *B*, el sujeto no concluye que este conjunto *T* resulte entonces dividido en dos subconjuntos *B* y *H*, sino simplemente que todo cayó porque *n* forma parte del total, o bien, por el contrario, que nada cayó porque el único elemento nombrado (el enésimo) no está aún en *B*. Es así como *Bri* no sabe lo que hay en *H* y en *B* luego de la caída de las bolitas, y para *T* = 4 y tres caídas en *B*, concluye que quedan cuatro en *H*. De la misma manera, *Dan* estima, después que se hacen caer algunas bolitas, que en *H* tanto como en *B* hay todo (*T*) o nada. *Cat* —a quien se le pide que deje caer siete veces— hace descender el todo (*T* = 10) porque 7 forma parte de 10, pero se niega a considerar a esos 7 como un subconjunto cuantificable porque "no puede nunca haber 7 con 10". En cuanto a las cuantificaciones ordinales, el sujeto cuenta bien sus acciones sucesivas, pero *Cat* —como muchos otros sujetos— numera como "uno" la acción de tomar la primera bolita y "dos" la acción de hacerla caer en el tubo, de tal manera que para tres bolitas que han descendido, las cuantifica con el número cuatro.

En pocas palabras, el primer nivel es el de las conductas anteriores a toda cuantificación, de tal manera que nuestro estudio sobre las relaciones entre los ordinales y los cardinales se referirá de manera más general a la formación del número en tanto cantidad, en otros términos, a la elaboración de un sistema de significaciones fundamentales que no están dadas desde el comienzo por el contacto con los objetos (como se podría creer), sino que dependen de

actividades más complejas que las previstas. En este nivel inicial, aunque el todo *T* haya sido dividido por la acción en dos subconjuntos —"el de las bolitas que parten" al pasar de *H* hacia *B* y "el de las bolitas que se quedan" en *H*— el todo guarda la significación de un objeto indivisible cuyas partes conservan la extensión como si se tratara de una propiedad común a una clase cualitativa y a sus subclases (*cf.* las "flores" y las "margaritas" que son también "flores").[1]

2. Nivel IB

Situamos en este nivel una serie de casos intermediarios entre los precedentes y el nivel de las relaciones cuantitativas entre las bolitas de *B* y las de *H*.

ARO 5;9) Primera situación; *T* = 11 anticipación: "—Una por una antes de la quinta. ¿Dónde está la quinta? —*Allá* (*H*) —¿Y cuántas hay abajo? —*No sé . . . 4.* —¿Y en *H*? —*No sé.* —¿Más o menos? —*Diez*" Segunda situación, *T* = 13: "—Dejamos caer 10; ¿la cuarta estará en *H* o en *B*? —*En H porque no la pusimos todavía. No se puede saber porque no hicimos nada*". Segunda situación; *H* = 13, realización: "—Dejas caer 10 en *B*, ¿dónde está la cuarta? —*Está abajo.* —¿Y la séptima? —*Porque hice caer diez, también cayó la séptima.* —¿Y la decimotercera? —*En H*". Con *T* = 8: "—Antes que caiga la cuarta, ¿cuántas hay en *B*? —*Tres.* —¿Cuántas en *H*? —*Ocho.* —¿Al comienzo cuántas había? —*Ocho; entonces no hay más ocho.* —¿Cuántas? —*Cinco; no conté éstas* (las 3 en *B*); *sólo conté aquéllas* (las que quedan = las otras 5)"

LAV (5;6) Primera situación, *T* = 11, anticipación: "—¿Antes de la quinta? —*Cuatro* (en *B*) —¿Y en *H*? —*Seis, no, porque es demasiado cerca del cinco.* —¿Entonces? —*Diez, porque no está cerca del cinco*". Realización: En *H* "*hay nueve, puede haber nueve o diez; pensé nueve*".

ANA (6;6). Cuando *T* = 11 razona como los del grupo IA, pero razona correctamente cuando *T* = 8.

En el primer caso (*T* = 11) y antes de la caída de la quinta bolita piensa que hay 4 en *B* y 10 en *H*, o sea un poco menos que 11 o simplemente las 11 menos la 5ª. Por el contrario, para *T* = 8, antes de la 4ª habrá 3 en *B* y 5 en *H*: "—*Conté.* —¿Por qué no contaste hasta 6? —*Porque si no habría 9 arriba* (= en total) *y solamente hay 8 bolitas para el juego*".

CRI (6;8). Distingue bien dos subconjuntos en tanto tales, o sea las bolitas de *B* en tanto bolitas que han caído y las "*que quedan aún en H*" y cuenta a éstas con sus dedos pero en el prolongamiento de las primeras. Para *T* = 11: "—¿Antes que caiga la quinta? —*Cuatro.* —¿Cómo hiciste? —*Casi calculé: 1, 2, 3, 4,5 y sacamos uno,quedan 4.* —¿Y en *H*? —*Conté: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, entonces quedan aún 11* (en *H*)".

[1] J. Piaget, B. Inhelder, *La genèse des structures logiques élémentaires*, Neuchâtel y París, Delachaux, y Niestlé, 1959. Hay traducción española: *La génesis de las estructuras lógicas elementales*, Buenos Aires, Guadalupe, 1967.

MAR (6;11). Para *T* = 11 (anticipación): "—¿Antes de la 5ª) —*Hay cinco abajo si la quinta desciende.* —¿Y arriba? —*Puede ser 5 también; si abajo puede haber también puede haber 5 arriba*" (simetría). Para *T* = 8: "—¿Antes de la 4ª? —*Abajo tres porque antes del cuatro es el tres.* —¿Y arriba? —*No puedo saber porque no sé cuántas hay en total*".

El progreso logrado en este nivel es que la numeración hablada adquiere una significación de cuantificación que corresponde a la pregunta "¿Cuánto?", lo que permite a los sujetos liberarse del "todo o nada" propio del nivel IA y distinguir en principio dos subconjuntos en el interior del todo *T*: el de las bolitas que descienden de *H* hacia *B* y el de las unidades "que quedan aún en *H*" (como dice *Cri*). Un indicio notable de esta subdivisión cuantitativa del todo es la observación de *Mar* en el caso de un todo *T* indeterminado: si bien se pueden cuantificar las tres bolitas que caen, no se puede decir nada de las que quedan "porque no se sabe cuántos hay en total". Pero aunque haya un progreso neto, una conducta frecuente de este nivel, que parece ser un residuo del "todo o nada" del nivel IA, es que, para cuantificar "las que quedan todavía en *H*", como dice *Cri*, este mismo niño (y muchos otros como él) no las cuenta separadamente sino a continuación de los *B*: habiendo numerado del 1 al 4 para el recipiente *B*, *Cri* prosigue 5, 6, 7, ... 10, 11 para el recipiente *H* y en lugar de concluir que hay de 5 a 11 para *H* infiere "entonces tiene todavía 11" por una falsa identificación del "resto en *H*" y del todo *T*. Por el contrario, *Aro*, que comienza también con una igualdad *T* = *H*, sólo necesita recordar que *T* = 8 para deducir que "entonces en *H* no hay 8 sino 5. No conté esos" (los 3 en *B*: porque 8 menos los 3 en *B* hacen 5). De manera general, si hay aún en este nivel muchas dificultades cuando *T* = 11 o mayor, la simplificación de *T* en *T* = 8 permite muchas respuestas exitosas: *Ana* reparte el todo *T* = 8 en 3 *B* y 5*H* y cuando se le pregunta "¿por qué 5 y no 6?" responde "si no habría 9 (en total) y solamente hay 8 bolitas para el juego". Por otra parte, la segunda situación es casi siempre resuelta, incluyendo las anticipaciones.

3. Niveles II y III

En el nivel II los dos subconjuntos están mejor disociados y dan lugar a enumeraciones separadas aunque aún con cierto número de errores de cálculo. Veamos algunos ejemplos, el primero de los cuales es un caso intermediario, IB → II.

SER (7;1) fracasa aún en la primera situación, con *T* = 11. Pero para *T* = 8 cuenta con sus dedos 1, 2, 3 para *B* y de uno a cinco para *H* o sea disociando bien los dos subconjuntos. "—¿Sirve para algo saber que hay 8 en total? —*Sí, sirve para calcular*". Se dejan caer 3 grupos de dos bolitas cada uno: "—¿En qué montoncito está ahora la 5ª? —*En el último.* —¿Y la cuarta cayó o no? —*Sí, porque 5 es más grande que cuatro*".

LAI (7;5) Primera situación, anticipación, *T* = 11. "—Antes que caiga la quinta ¿cuántas habrá en *B*? —*Cuatro y la quinta está todavía en H.* —¿Cuántas en total? —*11* —¿Cuántas quedan en *H*? —*9.* —¿Por qué? —*Conté las bolitas* (= *T*) *y después saqué las 5 y encontré 9*" (como si 11 − 5 = 9). Realización: "—¿Antes que caiga la sexta? —*5 en B.* —¿Y arriba? —*8.* —¿Cómo hiciste? —*Cuento 4 abajo y después cuento 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y después los conté* (con los mismos dedos) *de uno a ocho*". No se trata entonces de una continuación (como *Cri*, del nivel IB) sino de una implicación en función de la cual los ordinales 5 a 12 equivalen a 8 cardinales.

PAT (7;2) Primera situación, anticipación, *T* = 11: "—¿Antes de la quinta? —*Cuatro abajo.* —¿Y arriba? —(cuenta de 1 hasta 11 y elimina los cuatro primeros y luego cuenta los restantes de 5 a 11). *¡Ah, entendí! quedan 7* (volviendo a contar aparte de 5 a 11)". Realización: la niña cuenta aparte de 1 a 4 para *B* y cuenta de 1 a 7 del quinto al undécimo. "—¿Cómo hiciste? —*Sé que hay cuatro abajo; cuento una vez para hacer 11; los cuatro* (primeros) *no cuentan; cuento entonces otra vez los otros* (de 1 a 7)". Segunda situación (anticipación): Respuestas correctas a todas las preguntas ordinales para *T* = 15 y *B* = 10. "—¿Cuántas en *H*? —*Es difícil saber*". Cuenta de 1 a 15 y luego de 11 a 15: "*Da cinco*".

AND (7;1) para la segunda situación, anticipación, *T* = 15 y 10 bolitas que caen: exactos los ordinales y para los cardinales finales cuenta 15 y elimina 10 obteniendo *H* = 5.

CLA (8;1). Primera situación, anticipación, *T* = 11: "—*Arriba hay 8 quizás; si se pusieran las 4 de B harían 11*". Para *T* = 8: "—*Pasan 3 bolitas, menos la 4, 5, 6, 7, 8, ... hacen 5*".

SAN (8;6), anticipación, *T* = 11: "—*En B hay 4 y luego 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, da 7*".

Veamos ejemplos del nivel III (adiciones y sustracciones):

JOE (9;6). Primera situación, anticipación *T* = 11: "—*4 abajo* —¿Y en *H*? —*7* (sustracción 11 − 4) —¿Cómo lo sabes? —*4 abajo y luego conté* (el resto)". Para *T* = 15 y 10 en *B*: "—¿Dónde está la décima? —*Abajo* —¿Cuántas hay arriba? —*5* —¿Cómo lo sabes? *Porque cayeron 10 y había 15 en total* (o sea 15 − 10 = 5)". Para *T* = 8 y 3 en *B*: "—¿Cuántas en *B* y en *H*? —*3 en B y 5 en H.* —¿Cómo lo hiciste? —*Hay 3 en B, más lo que hace falta para hacer 8* (o sea 8 − 3 = 5)".

RIC (9;4) anticipación, *T* = 11: "—*Cuatro abajo.* —¿En *H*? —*Quedarían 7.* —¿Por qué? —*Porque hice 4 más 7* (adición) *y después saqué 7* (de 11: sustracción)".

ELI (9;2) Primera situación, anticipación, *T* = 11: —"*Cuatro abajo, entonces siete arriba; cuatro más siete da 11*". Segunda situación con *T* = 15 y 10 en *B*: "—*Da cinco*". Para *T* = 8: "—*Hay 3 en B, entonces da cinco* (en *H*). —Muestra con tus dedos. —(Lo hace). —Hay algunos niños que hacen así pero dicen que da 3 en *H* ¿en qué se equivocan? —*En lugar de mirar sobre sus dedos* (el cardinal de *H*) *dicen el número que han dicho al final*" (en otras palabras el ordinal final en la enumeración del todo).

LAC (9;5) Segunda situación, anticipación, *T* = 15: "—*Al final hay 5 porque 10 + 5 = 15. No se puede decir 6, si no habrían bajado 9*".

El progreso sensible del nivel II con respecto a IB es la disociación neta entre los dos subconjuntos *B* y *H* en el interior del todo *T*. Los *B* son fáciles de determinar en tanto expresión de las acciones sucesivas de "dejar caer" o sea de una ordenación de las acciones materiales, realizadas o anticipadas, lo que explica el éxito en *B* desde el nivel IB. Por el contrario, desde la enésima caída el sujeto continúa por enumeración ordinal, pero solamente verbal o con ayuda del soporte material de los dedos, de donde para 4 en *B* "después cuento 5, 6 . . ., etc." *(Lai)* hasta el último. Pero la novedad con respecto al nivel IB es que el sujeto comprende entonces que "los 4 primeros no cuentan" (*Pat*) y que entonces hay que volver a contar, pero aparte, los números 5 a 11. Así, *Pat* vuelve a contar del 5 al 11 o sea "los otros" o "los que quedan" en *H*, pero una enumeración nueva convertida en cardinal en tanto suma numérica del subconjunto *H*. De hecho, esta maniobra complicada que caracteriza a este nivel II constituye un equivalente funcional o una preparación de las operaciones de adición y de sustracción. Decir, como *Pat*, que "los 4 primeros no cuentan" equivale a sacarlos de la totalidad, lo cual es una sustracción en acto; decir, como *Pat*, *San* y otros "y después" para pasar de los elementos en *B* a lo que queda por encontrar en *H* para constituir el todo *T*, constituye el equivalente de una operación aditiva.

Son entonces esas condiciones y sustracciones las que se hacen explícitas en el nivel III. Cuando *Joe* dice "hay 3 en *B* más lo que hace falta para hacer 8" (el todo) el término "más" designa conscientemente una adición. La tematización de las adiciones y sustracciones también resulta clara cuando *Ric* dice "hice 4 más 7 y después saqué 7" porque si hay 11 y se dejan caer 4 quedarían 7 (en *H*).

Debe notarse además con qué claridad *Eli* logra explicar los errores cometidos en los niveles precedentes cuando, por no disociar suficientemente los subconjuntos en el interior de la totalidad, los niños confunden el número de los *H* con el del todo.

4. Conclusiones

El número cardinal es un conjunto que se conserva en una totalidad simultánea cualquiera que sea el orden de numeración posible de sus elementos concebidos como unidades equivalentes. El ordinal es una sucesión de rangos, cada uno de los cuales está definido por el número cardinal de sus predecesores. Resulta entonces evidente —como lo muestran las reacciones del nivel III— que entre la cardinación y la ordenación hay implicaciones mutuas, lo cual no significa identidad sino interdependencia necesaria: 1) el ordinal implica al cardinal ya que la significación de un rango está determinada por el número cardinal de sus predecesores (el enési-

mo, cualquiera que sea, es el rango del elemento que está precedido por *n* – *1* cardinales); 2) pero el cardinal implica al ordinal porque si bien sus elementos son equivalentes (y deben ser considerados como tales) el único medio para distinguirlos es enumerarlos en cierto orden.

Resulta entonces natural que en estas pruebas el sujeto pueda proceder a inferencias sobre los cardinales a partir de informaciones ordinales y recíprocamente, pero solamente si es capaz de distinguirlos. Esta distinción parece fácil ya que las ordinaciones son efectuadas en acciones por los pasajes de *H* hacia *B* permaneciendo estables los cardinales (en *H* cuando aún no descendieron, o bien en *B* como resultado del descenso). Pero el hecho interesante es que, aunque la evaluación de *B* resulta facilitada porque los elementos han sido reunidos por las acciones, la de los números restantes en *H* es problemática en tanto estos elementos constituyen un subconjunto $H = T - B$ y, para enumerarlos, el sujeto continúa simplemente el conteo que efectuaba cuando hacía bajar los elementos precedentes. Resulta entonces que en el nivel IA no hay implicaciones entre ordinales y cardinales (salvo en el caso muy simple en el cual *n* bolitas descendidas → *n* cardinales en *B*) sino indiferenciaciones (la caída de un enésimo cualquiera entraña el todo *T* de *H* hacia *B*). Entre esta indiferenciación (todo o nada) del nivel IA y las operaciones aditivas y sustractivas del nivel III, todos los progresos se deben a la elaboración de nuevas significaciones y a las implicaciones que ellas conllevan. En IA el hacer descender algunas bolitas solo comporta la significación de una especie de absoluto determinado por acciones ejecutadas materialmente (sin anticipaciones) y desprovistas de cualquier relación con la totalidad *T* o incluso con un resto en *H*, porque éste no ha sido objeto de ninguna actividad. Por el contrario, en el nivel IB las caídas adquieren la significación "de algunas" entre otras, lo que confiere a estas otras una significación que no había sido considerada hasta entonces: "la de un resto" que no es aún relativo a un todo (mientras que *Cat* —nivel IA— dice: "nunca puede haber 7 con 10", rechazando así la idea de fraccionamiento). *Aro* (5;9) se refiere a las que "no pusimos todavía" lo que comporta esta nueva y esencial significación "del resto" pero aún irreconocible por falta de acciones sobre él: "no se puede saber porque no hicimos nada". Por el contrario, *Lai* postula que deben ser muchos (= "no demasiado cerca" de la frontera entre 4 y 5). Por otra parte, *Cri* (y otros) quiere contar los *H* pero solo lo hace prolongando las caídas, de donde resulta $H = T$, lo que recuerda el nivel IA. *Mar* recurre a la simetría *H* = "quizás también 5" como en *B*, etc. Pero el cambio decisivo de significaciones se efectúa en IIA cuando el "resto" en *H* da lugar a un conteo separado sin referencias sistemáticas al todo, pero con declaraciones explícitas sobre la dualidad de dos subconjuntos: "los cuatro (en *B*) no cuentan" dice *Pat* (significando que ya

son conocidos por haber caído), "cuento una vez más los otros (= los *H*)", y esto después de una especie de "insight" que le hacé descubrir que el "resto" debe dar lugar a una consideración separada: "¡ah!; quedan 7". Finalmente, en el nivel III, esas adiciones y sustracciones que intervenían de manera implícita en el nivel II adquieren la significación de operaciones en tanto que están constantemente subordinadas a la composición o a la descomposición de un todo *T* que es continuamente invocado en virtud de las implicaciones fundamentales $T \rightarrow B + H$ o $H = T - B$.

En la segunda situación resulta claro que las inferencias conducen a implicaciones más precoces, de la misma manera que la primera situación con totalidades y subconjuntos de números más reducidos. Resulta no menos claro que todos estos cálculos constituyen implicaciones entre acciones u operaciones, incluso si el sujeto las expresa bajo la forma de enunciados. Se ha formulado a menudo el problema de la reductibilidad de un cálculo a un sistema cualquiera de inferencias; esta reducción resulta evidente si se introduce la noción de implicación entre acciones.

SECCION II
EL CONTEO EN ORDEN CIRCULAR

Puede resultar interesante completar lo que precede examinando cómo reaccionan los niños para determinar cardinales y sobre todo ordinales cuando una colección de elementos es presentada en orden circular. Por ejemplo, se preguntará cuántos botones hay en un círculo de 10 u 11 elementos, y luego, cuántos primeros hay, cuántos segundos, cuántos terceros y cuántos últimos en el interior de tal colección. Distinguiremos tres niveles.

En el nivel IA el sujeto no piensa de inmediato en marcar por medio de una referencia al elemento elegido como primero y llega entonces a una o dos unidades en más o en menos al final de su enumeración. Pero sobre todo no ve que se pueden encontrar tantos segundos, etc., como primeros haya e incluso dos veces más si se va en los dos sentidos.

SAN (5;0) frente a un círculo de 10 los cuenta sin marcar cuál fue el comienzo y llega al resultado 11. "—¿Cuál es el segundo? —*Aquél* —¿Algún otro puede ser el segundo? —*No* —¿Por qué? —*Porque entonces habría un error*. —¿Puedes empezar a contar por aquí (enfrente)? —*Sí* (cuenta 1 . . . 2). —¿Puede haber otro segundo? —*No*. —¿Y si empezamos por otra parte? —*Sí, allá* (muestra tres pares sucesivos diciendo a veces '1 . . .2' y a veces '*aquel antes y este segundo*'). —¿Ya hay cuántos segundos? —*Tres*. —¿Se pueden encontrar otros? —*No*. —¿Por qué? —*Porque no volvimos a contar*. —Prueba. —(Forma pares disjuntos 1 . . . 2, 1 . . . 2, etc., sobre todo el recorrido, luego recomienza en el otro sentido y al llegar a un mismo término que ya había sido contado 2, lo pone en el centro del círculo). —¿Y cuántos terceros? —(Mismo procedimiento) —¿Y cuántos primeros? —*Todos, porque habría podido tomarlos al principio*".

ANI (5;9) delante de un círculo de 7, cuenta 8: "—No, aquel lo contaste dos veces. ¿Cuál es el segundo? —*Aquél.* —¿Y si empezamos aquí cuánto va a dar? —*También siete.* —¿Por qué? —*Yo sé.* (Vuelve a empezar con otro punto de origen). —¿Cuál es el segundo? —*Allá.* —¿Cuántos botones pueden ser los segundos? —(Ella forma tres pares sucesivos). *Tres y también aquél* (el séptimo). —¿Cuántos pueden ser los primeros? —*¡Todos!* (los muestra uno por uno). —¿Y los terceros? —*Tres* (muestra los tres tríos)". Se hace una fila de cinco alineándolos: "—¿Cuántos hay? —*Cinco.* —¿Y así? (se muestra en el otro sentido). —*Es lo mismo.* —¿Cómo puede ser que éste sea una vez el cuarto y una vez es el segundo? —*Porque acá está antes del cinco.* —¿Y en el otro sentido? —*Aquél es el cuarto*".

PAT (6;8) con un círculo de 11 bien contados: "—¿Cuántos segundos hay? —*Aquél* (a la izquierda del primero contado) *y aquél* (a la derecha): *dos.* —¿Es todo? —*Tres; no, dos.* —¿Pero en total (se cambia el punto de origen) —*Hay dos que son segundos.* —¿Y en total? —*Ocho.* —¿Y cuántos terceros? —*Nueve.* —¿Y cuántos primeros? —*Todos.* —¿Y cuántos undécimos? —*Dos.* —¿Cómo puede ser que once sean primeros y solamente dos sean undécimos? —. . .*No sé*".

Para comprender mejor la significación de estas reacciones iniciales examinemos primero los niveles IB y II. En IB hay mezcla de respuestas análogas a las precedentes y de comprensión.

AND (6;10) cuenta correctamente 11 botones en círculo: "—¿Cuántos segundos hay? —*Uno* (indicando el sentido de derecha a izquierda) *no, dos* (en el otro sentido). —¿Hay otros? —*Sí, al revés* (con punto de origen enfrentado al primero). —¿Hay otros? —(Dos, con otros orígenes). —¿Cuántos en total? —*Muchos* (cuenta los pares como si cada elemento sólo comportara un segundo siempre en el mismo sentido de rotación). *Da cinco.* —¿Y cuántos terceros? —*Cuatro.* —¿Y cuántos undécimos? —*¡Todos! no, solamente uno* (el último). —¿Y si contamos así? (con otro punto de origen). —*¡Ah, si se cambia a cada uno* (de los términos tomados como primero) *hay un once* (insight). —¿Por qué? —*Porque da vueltas un poco* (= los primeros y por lo tanto también los últimos se suceden en orden cíclico). —¿Y cuántos terceros? —(No logra generalizar pero rehace tríos) *4, no 3* (dejando los dos últimos botones sin ocupar) —¿Cómo puede ser que hay once undécimos y solamente tres terceros? —*Porque 3 × 4 = 11. No, porque hay solamente tres terceros* (tríos)".

En el nivel II (7-8 años) se resuelven estos problemas. Veamos dos ejemplos, el primero de los cuales es notablemente precoz.

BRI (5;0) con 7 botones retiene un punto de origen y muestra un segundo de cada lado. "—¿Hay otros? —*Sí* (toma un tercero, dice 'primero' y muestra sus vecinos). —¿Hay otros? —*Sí, cualquiera porque están todos al lado uno del otro*". Idénticas respuestas para los siguientes, sin recortes en pares, tríos, etc.

HEL (8;10) con un círculo de 13: "—*Para contarlos hay que saber dónde empezamos.* —¿Aquél (el sexto) podría ser el segundo? —*Sí, se puede, yo empecé por aquél* (el precedente). *Todos podrían ser el segundo, pero no todos a la vez, por turno, porque se puede empezar por otro lado.* —¿Dos no pueden ser segundos al mismo tiempo? —*Sí, pero no para contarlos* (cardinalmente); *no se cuenta 1, 2, 2, 3, 4*". Pero si se quiere obtener la suma (cardinal) cualquier orden es posible: "—*Da el mismo número, no cambió*". Se disponen entonces 10 botones en una

línea recta: "—*Da 10.* —¿Se puede comenzar por otra parte? —*Sí* (en el otro sentido). —¿Y por aquí? (el tercero de la izquierda). —*Sí* (pone allí una marca) *se cuenta esto* (de 3 a 10) *y luego esto* (del 1 al 2). —¿Y aquél (el séptimo) puede ser el segundo? —*Sí, se puede* (comienza en el sexto)".

Se ve que en este nivel II, con esta técnica, hay ya a la vez diferenciación clara entre la cardinación y la ordinación e implicaciones mutuas entre ellas. Conformemente a las definiciones que recordamos en las conclusiones de la sección I, el número cardinal es un conjunto que se conserva cualquiera sea el orden de enumeración de sus elementos, lo que afirma *Hel* cuando dice que al cambiar el orden "da el mismo número, no cambió". Recíprocamente, el ordinal es una sucesión de rangos cada uno de los cuales está determinado por el número cardinal de sus predecesores, de lo que resulta en este nivel II que para *n* elementos se obtendrá (contando en los dos sentidos) *2 n* segundos, *2 n* terceros, etc. Aunque esas significaciones e implicaciones mutuas son comprendidas ya desde el nivel II, se reencuentra en el nivel IA la indiferenciación entre ordinales y cardinales de la que hablábamos en la sección I: para un total de *n*, el número de los segundos, terceros, etc., no es *2 n*, es decir función del todo *n*, sino pequeños subconjuntos disjuntos que consisten en pares, tríos, etc., a la vez cardinales y ordinales. Este progreso de las significaciones al pasar de los niveles IA y IB a II es entonces resultado, no solamente de diferenciaciones e implicaciones mutuas, sino también de una relativización fundamental de las nociones utilizadas.

V. Las relaciones intraobjetales

con la colaboración de R. Zubel y G. Merzaghi

La investigación que presentamos aquí puede parecer trivial porque se refiere a los rompecabezas más simples que existen. Pero se trata, desde nuestro punto de vista, de examinar qué es lo que comporta la noción de objeto desde el doble punto de vista de las significaciones y de las implicaciones entre acciones y, para hacerlo, los problemas menos complejos son los más instructivos.

Desde un punto de vista general, las dos significaciones de un objeto son: subjetivamente, lo que se puede hacer con él; objetivamente, de qué está hecho o compuesto. Si bien la primera significación se confunde con la significación de las acciones (de las que no nos vamos a ocupar en este capítulo) la segunda significación plantea el problema de establecer si la composición del objeto se reduce a un conjunto de observables o si exige puestas en relación, reconstituciones, etc., o sea actividades del sujeto más o menos emparentadas o incluso isomorfas con las operaciones. Esto último es lo que intentaremos mostrar y con ese objetivo nos limitaremos a los problemas más simples.

La composición de un objeto se reduce, por una parte, a sus propiedades observables (que incluso en ese caso exigen interpretaciones) o a propiedades que deben ser descubiertas. Por otra parte, la composición de un objeto consiste en sus partes o trozos más o menos ligados a sus propiedades y cuyas conexiones espaciales deben ser comprobadas o establecidas. Para poner en relieve el rol del sujeto en esas diversas relaciones hemos tratado de analizar las reacciones a varios rompecabezas cuyos elementos son presentados en desorden. Ese conjunto de 23 piezas de formas diferentes (cf. figura 5) estaba constituido por:

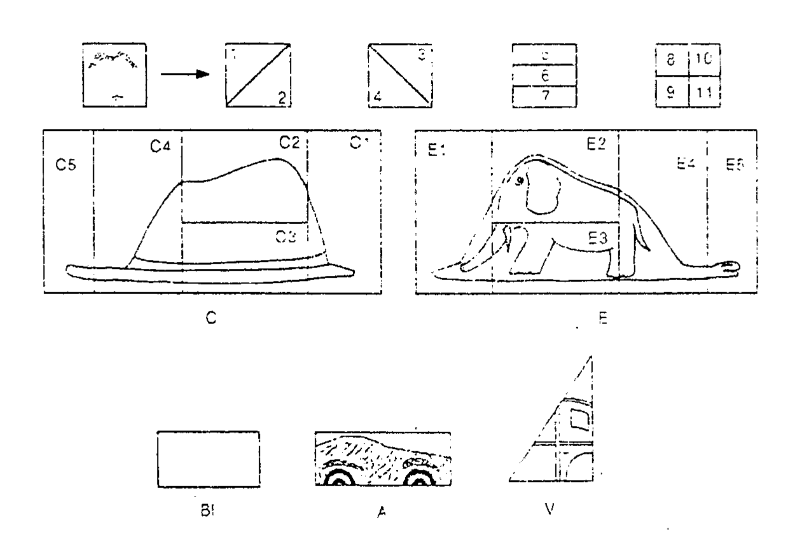
— 13 partes de manzana de las cuales 11 (1 a 11) son combinables para formar 4 manzanas rojas enteras, quedando aisladas las dos partes restantes (verdes);
— 5 piezas de doble cara que forman, en una de las caras, un

elefante dentro de una boa (E1-E5) y, en la otra cara, un sombrero (C1-C5); *

— 2 piezas de una sola cara: una del elefante (E'2) y la otra del sombrero (C'1);

— 3 piezas que no forman parte de ningún rompecabezas, no coordinables entre sí ni con las otras piezas, y que representan un pedazo de un automóvil (V), los ojos de un animal (A) y una pieza en blanco (B1).

Figura 5



La consigna era muy simple: "trata de hacer algo (con estas piezas) y dime lo que es", sin indicar la cantidad de objetos. Las relaciones que deben construirse son entonces o bien intrafigurales (reconstituir un elefante coherente) o bien interfigurales (poner juntas las manzanas, etc.). Nuestro problema consiste en establecer hasta qué punto esas relaciones son ya formas operatorias: conjunciones, negaciones, intersecciones, incompatibilidades, implicaciones, etc.

* Ilustraciones extraídas del *Petit Prince* de Saint Exupéry.

1. Nivel IA

Veamos ejemplos del nivel IA.

TIE (3;5) toma un trozo de manzana (2). "—¿Qué es? —*No sé*. Junta a este trozo la pieza 8 que es también un trozo de manzana pero no combinable espacialmente con la otra y dice: "—*También una manzana*" pero "*hay que ponerla aquí porque es verde* (trozo de hoja)". Después de haber agregado otra pieza (la parte mediana) cambia de significación: "*Ahora tengo una casa*". Agrega pedazos de sombrero y llega a un conjunto heterogéneo pero en el cual los dos criterios de vecindad o conjunción son colores parecidos y sobre todo ausencia de huecos entre los elementos. Construye luego un segundo conjunto formado, de arriba hacia abajo, del dorso del elefante ubicado sobre el pedazo de auto, éste sobre un espacio blanco, los ojos del animal y al final un trozo del sombrero: "*Es un caballo y esto el agua; es un caballo en el agua*". En la última fase de la construcción junta sus dos composiciones y concluye: "*Son solamente manzanas*".

AYA (3;1) comienza igualmente por pares de pedazos (del elefante y luego de manzanas), luego reúne 5 piezas con la preocupación de que sean bien contiguas y muestra una parte diciendo: "*es una manzana*". Termina por rodearlos de una corona de elementos heterogéneos y declara encantado: "*¡Una casa!*".

MIN (3;2) comienza también por pares o trios de pedazos mal ajustados diciendo cada vez: "*una manzana*". Luego para otro par de elementos dice: "*es un elefante, un pedazo de elefante*". Pero luego apila una serie de pedazos en desorden: "*una manzana que cae en el agua con el auto y una casa*"; luego reparte las piezas en 8 pares alineados: "*son cosas de manzanas* (no todas las piezas lo eran), *es un camino de manzanas*". Se le muestra un par formado por un pedazo del elefante y un pedazo de manzanas: "¿Va bien junto? —*Sí, todo va bien junto*".

Estos sujetos de tres años (el nivel IB comienza hacia los 4 años) son interesantes por lo que les falta aún para construir objetos. Los primeros pedazos elegidos al azar no son concebidos como las partes de un objeto total que habría que completar utilizando uno de ellos como referencial inicial y anticipando las totalidades de las cuales formarán parte. Solamente *Min* habla de un "pedazo" (de elefante) pero sin buscar los otros "pedazos" con anticipaciones o por ensayo y error; los pedazos son simplemente asociados a otros hasta el momento en que tales "seudototalidades" formadas por elementos heterogéneos pueden dar lugar a significaciones. Pero éstas presentan las dos características siguientes: 1) poder cambiar en el transcurso del proceso: la "manzana" de *Tie* deja de ser tal después de nuevas adjunciones porque "ahora tengo una casa" (y lo mismo *Aya*); 2) designan situaciones modificables y no objetos permanentes: "Es un caballo en el agua" (*Tie*) o "una manzana que cae en el agua con el auto y una casa" o "un camino de manzanas" (*Min*) que incluye por otra parte pedazos de elefante y de sombrero. *Min* formula por otra parte el carácter general y esencial de este nivel IA al decir: "Todo va bien junto", o sea cualquier cosa

puede ir con cualquier otra a condición de inventar una relación cualquiera en lugar de buscarla por anticipación o de encontrarla por conjunciones necesarias o justificables con puestas en relación de observables objetivamente reunidos.

2. Nivel IB

A partir de los cuatro años se asiste a un cambio notable en la búsqueda del objeto en el sentido de que el trozo de rompecabeza elegido inicialmente —cualquiera que sea— es utilizado como pieza o elemento "referencial" que se trata de completar para hacer un objeto aislable y conservable caracterizado por relaciones "intraobjetales". Estas relaciones consisten en "conjunciones obligadas" y son obtenidas, en parte, en el curso de intentos empíricos, pero ya, también en parte, por anticipaciones locales, válidas o erróneas que guían la búsqueda en grados diversos.

MAR (4:1) comienza con el dorso y el ojo del elefante que pone junto a la parte vecina diciendo *"un pescado"*. Toma en seguida la mitad de una manzana que completa correctamente con otra mitad y dice *"una manzana"*. Luego toma otra pieza (dos ojos de animal) para la cual busca un complemento: *"no hay"* (negación correcta); intenta sin embargo con dos partes de elefante: *"no, falta algo"*. Vuelve a las manzanas con un pedazo verde: *"voy a hacer la manzana verde"*; reúne los trozos y constata que faltan ajustes especiales: *"no va, porque aquí rebasa y allá también"*.

FRE (4;6) comienza con un trozo de manzana (2) y dice: *"parece un tomate"* e intenta reunirlo con otra mitad de manzana (4): *"no es la que sirve* (parte complementaria)"; hace otros seis ensayos repitiendo *"no sirve"*, *"tampoco sirve"*, etc., terminando con una combinación correcta (5, 9, 11): *"ya está; parece una manzana; voy a buscar otra"*, y encuentra finalmente 2 con 1 y 3 con 4, logrando tres manzanas completas después de negaciones y búsqueda de conjunciones intrafigurales. Pasa al elefante y logra ensamblar dos piezas (E2 y E3) diciendo: *"hay que dejarlas* (así)" pero "*esto* (piezas restantes) *no hay nada que sirva*" haciendo la hipótesis de que *"sacaron una figura* (un pedazo)" y reuniendo esas negativas en una clase aparte que evoca el $\bar{p} \cdot \bar{q}$ de la incompatibilidad p/q.

FRI (4;2) ve de inmediato en los pedazos (1-11) varias manzanas posibles y construye pares diferentes; luego compara *E2* y *E'2* y concluye: *"tengo tres manzanas y dos animales"*. Juntando *C4* y *C1* pegadas verticalmente dice: *"es un caracol"*. Se le pregunta si está terminado y dice que no.

GAR (4;2) aproxima *E2* y *E'2* y concluye: *"no, porque hay dos ballenas* (hay = son)". Para otras dos piezas (*C1* y *C'1*) dice: *"es un gusano que sube y uno que baja"*.

AMA (4;5) logra ensamblar las piezas 7, 8 y 10 partiendo de la 7 como referencial: *"una manzana y allá también"* (= otras relaciones). Cuando trabaja con las *E* se le propone reemplazar una *E* por una *C* y dice: *"van casi bien juntas"*.

CAR (4;9) logra ensamblar 8 + 10 y 9 + 11 y luego forma otra manzana (5 + 6 + 7): *"ya está y allá también"*; para el elefante ajusta las piezas E2 + E3 + E4 y luego correctamente E1: *"tengo todas las piezas"* (le falta E5); luego completa y distingue una mitad de *"víbora"* (= la boa) y luego *"la otra mitad"*. Pero piensa que el elefante es *"la otra mitad"* del sombrero.

Se ve la diferencia considerable que separa a estos sujetos de 4 años de aquellos de 3 años clasificados en el nivel IA. La diferencia principal es la constitución de relaciones intraobjetales, espacialmente contiguas y que se conservan bajo la forma de "conjunciones obligadas" incluso cuando se trata de pedazos de objetos que hay que reconstituir en totalidades cerradas y estables. En otros términos, el sujeto ya no construye conjuntos heterogéneos (tales como los que imagina *Min* cuando ve "una manzana que cae en el agua con el auto y una casa" y concluye que "todo va bien junto") sino que, partiendo de una figura que, con razón, supone ser por ejemplo un trozo de manzana, se sirve de esta figura como referencial para completarla con los pedazos complementarios. Resulta así la formación de acciones nuevas y fundamentales que se implican mutuamente: 1) la búsqueda de conjunciones que se hacen "obligadas" para llegar al objeto total; y 2) la intervención necesaria y correlativa de exclusiones o negaciones. Así, por ejemplo, buscando la parte correcta que se ajuste a su referencial, *Fre* descarta sucesivamente seis pedazos diciendo "no sirve", "tampoco sirve", etc., hasta el momento en que junta tres pedazos, dice "ya está; parece una manzana" y construye otras dos, agregando así a las conjunciones intraobjetales otras que son "interobjetales" y aun "inclusivas" (clase o colección de manzanas).

Además de esos progresos fundamentales, se observan varios otros. *Fre* no se contenta con negaciones parciales sino que también reúne los trozos inutilizados en una clase aparte: "En esto (las piezas descartadas) no hay nada que sirva". Por otra parte, sin que el sujeto comience con proyectos anticipados en cuanto a las formas finales, es capaz de inferencias parciales desde que una construcción ha sido iniciada. Por el contrario, un problema que no es en modo alguno resuelto es el de la relación entre las dos imágenes del sombrero (*C*) y el elefante (*E*) (que constituyen las cinco piezas de doble cara). O bien el sujeto construye algunas relaciones *C* o *E*, pero sin buscar la relación entre ellas, o bien piensa que hay una síntesis posible: para *Ama* la sustitución de una pieza que corresponde al elefante por una que corresponde al sombrero da lugar a la siguiente opinión: "van casi bien juntos". *Car* formula por el contrario la creencia común a quienes buscan la relación: el conjunto *C* constituye "la otra mitad" del conjunto *E*.

3. Los casos intermediarios y el nivel II

Los problemas planteados a los sujetos son tan fáciles de resolver que una vez adquiridos los prefuntores fundamentales constituidos en el nivel IB (conjunciones obligadas por relaciones intrafigurales y exclusiones o negaciones) los progresos ulteriores son de tipo procedural más que estructural: anticipaciones más rápidas y más completas del objeto que va a ser construido, varios referenciales diferentes y pasajes o transferencias de una construcción a otra, etc. Solamente queda un problema estructural para ser resuelto y veremos en qué reside el interés de este problema: es el saber si los dos lados de la pieza C (sombrero) y E (elefante) tienen una relación entre sí —en el sentido en que lo emplea *Car* cuando ve allí las dos "mitades" de un mismo todo— o bien si se trata de dos imágenes u objetos independientes como los que se pueden encontrar en un álbum ilustrado en el cual no hay relación entre el anverso y el reverso de una página. Es entonces, en función de la solución a este problema que distinguiremos un nivel II en el cual este problema está resuelto.

Veamos primero algunos casos intermediarios entre los niveles IB y II.

TRI (6;8) toma de inmediato tres piezas (*E1, E2, E3*) anticipando la totalidad y completa este elefante; luego toma la pieza *5* diciendo: *"es el palito de la manzana"*; toma luego las piezas *9* y *3* pero retira la *3* diciendo *"no sirve"*. Agrupa las piezas *5, 6* y *7* diciendo: *"está completa"*. Se le pregunta si puede hacer aún otra cosa; junta *8, 10, 9* y *11* y dice *"está terminada"*. Con los trozos *C4* y *C1* del sombrero concluye que se trata de *"un sombrero"* pero mezcla allí las piezas del elefante y ve un elefante; mezcla luego *C* y *E*, limitándose a constatar que *"hay piezas que faltan"*.

ERI (6;1) encuentra rápidamente las manzanas y anticipa el elefante que construye de inmediato, salvo que es considerado como *"una serpiente"*. Con respecto a las *C*, el niño había visto en *C2* *"una manzana"* y en *C3* *"un puente como un río"* o sea un paisaje. Después de haber construido el elefante quiere rehacer el conjunto *C* pero constata que *"faltan pedazos"*, sin darse cuenta que él mismo los había puesto del otro lado, y concluye *"tú me sacaste el otro pedazo"* sin comprender la existencia de dos sistemas independientes, uno de los cuales es el reverso del otro.

CEC (7;7) mezcla los *E* y los *C* y cuando se le sugiere que los dé vuelta concluye en *"un elefante muy mal hecho"* y *"un sombrero mal hecho"*.

Veámos ahora casos francos del nivel II:

IAN (7;5) distingue tres referenciales (*P, E, C*) y reparte en tres colecciones los elementos que se relacionan con ellos. Luego construye las manzanas; con *E2 + E3* dice: *"un elefante"*; con *C4 + C2* dice: *"una montaña o un volcán"*, pero cuando quiere terminarlos no encuentra más que *"una mitad de una montaña y la mitad de un elefante"*. Luego, habiendo dado vuelta una de las piezas exclama: *"ah, ahora sé: había*

un elefante y lo diste vuelta" y, con gran sorpresa, descubre que al dar vuelta el elefante se encuentra la montaña; entonces ordena correctamente las piezas.

GRE (7;8) logra de inmediato construir las cuatro manzanas; toma *E2*, *E5* y *E1* y dice: *"es un juego de elefante"*. Toma luego *C3*, la da vuelta y la asocia con la *E*. Toma *C4* y *E1*, da vuelta esta última (*C1*) y dice: *"es una especie de cabeza"* y la completa con *C4* y *C5* diciendo: *"ah, es una tortuga: allá (C5) la cabeza y allá (C2) el caparazón"*. Se le pregunta qué piensa que hay detrás y dice: "¡el elefante!" Llega así a dos sistemas independientes y junta cada uno de ellos correctamente diciendo: *"¡terminé!"*

OLI (8;11) construye las manzanas, toma *C4* y descubre del otro lado *E4*. Ensambla correctamente las *E*. "—¿Puedes hacer aún otra cosa?— *Sí, destruyendo quizás algo"*. Toma las *E*, deshace el elefante, descubre que *"hay algo como esto detrás"* y arma el sombrero: *"así tengo ahora el sombrero y luego después el elefante"*. Da vuelta una por una las piezas del sombrero y verifica que encuentra un elefante ya armado.

DID (8;3) construye las manzanas; toma *C5*, *C3*, *C1*; toma *E1*, *E2*, *E4* y dice: *"por el momento son todas mitades"* previendo *"un sombrero"* y *"también mitades de un elefante; son mitades que no se pueden poner juntas"*. Luego descubre que *"antes no había esto* (*C4* y *C2*); *puede ser que estén detrás"*. Se le pregunta qué se puede hacer y responde: *"darlas vuelta"*. Da vuelta entonces las piezas sistemáticamente una por una.

NIC (8;10) junta *C4* y *C1* y dice: *"es un sombrero"*, completándolo con *C5*. Luego ensambla algunas *E*: *"así hace un pedazo de serpiente"*. Como el sombrero no estaba *"muy bien hecho"* y el elefante estaba incompleto la niña da vuelta las piezas una por una y comprende la dualidad y la independencia de los dos sistemas.

En cuanto se refiere a los sujetos de 10-13 años (cuya edad corresponde en otros dominios a los niveles III) sólo difieren de los niños ya citados en anticipaciones e inversiones más rápidas, pero viendo las reacciones de los adultos (muy variables a este respecto), no se trata de nuevas estructuras sino de simples variaciones procedurales.

Si consideramos, por el contrario, las reacciones del nivel II se comprueba que es necesario llegar a la edad de 7-8 años para que el sujeto comprenda que bajo la imagen de un objeto dibujado sobre cartones puede haber en el reverso de esos mismos cartones la imagen de otro objeto sin relación con el primero. Antes de esto, o bien el niño mezcla las *C* y las *E* y concluye que faltan piezas para llegar a totalidades completas, o bien supone (como *Car*, nivel IB) que de un lado se ve una mitad del objeto y en el reverso la otra mitad, como si el elefante constituyera "la otra mitad del sombrero". Hay entonces un problema de significación.

Con respecto a las significaciones, además de la dualidad de las significaciones de los objetos (una manzana, etc.) o de las acciones (reunir o disociar, etc.) hay que distinguir otra dualidad que es la de los significantes y los significados. Los significados en juego son

aquí los objetos representados por nuestras imágenes o bien las acciones materialmente ejecutables. Los significantes, por su parte, pueden consistir en palabras (o morfemas significativos), o bien en símbolos arbitrarios (como los signos + o × etc. que representan adiciones, multiplicaciones u otras operaciones matemáticas), o bien imágenes o dibujos cuya significación se reduce a la de representar a los objetos exteriores. Ahora bien, sabemos por investigaciones ya muy antiguas que en los niños pequeños hay indiferenciación entre el objeto y su significante verbal, lo que equivale a decir que el nombre forma parte de la cosa (por ejemplo bastaría con mirar el Salève o el Monte Blanco para ver que se llaman así). En el caso que nos ocupa parecería haber también, antes del nivel II, indiferenciación entre el objeto exterior y su dibujo o imagen; en el reverso de un cartón que representa a un elefante se debe encontrar una parte de éste o un elemento vinculado con él (aunque sea un sombrero) como si una imagen fuera un objeto real que se puede dar vuelta para ver su otro lado. Por el contrario, en el nivel II, lo que se encuentra en el reverso de una imagen es otra imagen independiente de la primera que representa un sistema total en sí mismo.

A ese progreso estructural esencial se agregan en el nivel II múltiples progresos procedurales. Las anticipaciones son más rápidas y guían mejor las construcciones porque se refieren de inmediato a las formas finales del objeto en construcción. Los referenciales son más numerosos y el sujeto utiliza simultáneamente uno para las *P*, otro para las *E* y las *C*. El sujeto reparte, a menudo de antemano, en tres colecciones los elementos de estos tres sistemas antes de proceder a las construcciones detalladas. Estas construcciones pueden dar lugar a transferencias. A las exclusiones o negaciones distales (piezas que no sirven para nada) se agregan negaciones proximales (piezas que no sirven para los *E* pero utilizadas para *C*, etc.).

4. Conclusiones

Los dos fines generales perseguidos en esta obra consisten en buscar de dónde hay que partir para construir una lógica de las significaciones y en mostrar que ésta reposa sobre implicaciones y otras relaciones entre las acciones y las operaciones.

Una lógica de las significaciones no podría limitarse a la de los enunciados (verdaderos o falsos) y deben esencialmente referirse a sus contenidos, o sea a objetos mismos como es el caso en este capítulo. La significación de los objetos comporta dos aspectos. 1) En primer lugar es "lo que se puede hacer con él" físicamente (materialmente) o mentalmente. Físicamente se puede (o no) desplazar un objeto, cortarlo en partes, etc., lo que subordina esas

significaciones de los objetos a las significaciones de las acciones. Mentalmente los objetos pueden ser clasificados, seriados, etc., lo que los subordina de nuevo a significaciones de las acciones o de las operaciones. 2) La significación de los objetos comporta un segundo aspecto: "de qué está hecho", o sea cómo está compuesto, lo que subordina de nuevo los objetos a las acciones, pero acciones constructivas y no solo utilitarias.

Ahora bien, las acciones —tanto las acciones elementales como las de rango superior— no podrían existir ni funcionar sin relaciones entre ellas. Las relaciones más generales son las implicaciones entre acciones u operaciones. En el presente capítulo estas implicaciones son múltiples. Las más frecuentes son: 1) El hecho de haber recortado una imagen de objeto en pedazos implica su reconstitución posible reuniendo esos pedazos de manera adecuada. 2) Esta reunión de ciertos pedazos implica la exclusión de otros. 3) La reunión de pedazos implica "conjunciones obligadas" (de tipo $AB \rightarrow A$ de Anderson y Belnap) cuando A no puede ser separada de B, etc.

Volviendo al conjunto de las relaciones operatorias observadas en esta investigación, encontramos que además de las implicaciones entre acciones y de esas "conjunciones obligadas" propias a las conexiones entre las partes de un mismo objeto, hay lo que se pueden llamar "conjunciones libres" cuando las imágenes presentadas representan un objeto complejo cuyos elementos no están siempre reunidos en la realidad (como el elefante dentro de la boa, porque no todas las boas tragan elefantes y es sorprendente que incluso aquellos de nuestros sujetos que no conocían *El Principito* no hayan sentido una molestia particular por esta conjunción excepcional). Se puede también distinguir un tercer tipo de conjunciones que llamaremos "interobjetal" o "inclusiva" y que consiste en reunir en una colección única objetos recortados de diversas maneras pero de igual significación, tal como las "cuatro manzanas" de las que hablan los sujetos a partir del nivel II.

Por otra parte, distinguiremos cuatro tipos de incompatibilidad. 1) En primer lugar, hay incompatibilidad "intraobjetal" cuando dos objetos semejantes como dos manzanas han sido recortados de manera diversa de tal modo que un pedazo resultante de uno de los recortes no puede ponerse en conjunción con un pedazo que resulta de un recorte diferente. 2) Hay "incompatibilidad interobjetal" cuando aparece la imposibilidad de una conjunción entre los pedazos de un objeto (por ejemplo una manzana) y las partes de otro objeto (por ejemplo un sombrero). 3) Hay "incompatibilidad total" cuando los pedazos presentados o elegidos no se acomodan con nada, formando así una clase *PEC* (comparable a $\bar{p} \vee \bar{q}$ de la fórmula clásica $p \,.\, \bar{q} \vee \bar{p} \,.\, q \vee \bar{p} \,.\, \bar{q}$) 4) Finalmente se puede hablar de "incompatibilidad presentativa" en el caso del reverso de una pieza en la que el elefante que estaba dibujado en el anverso y el sombrero en el reverso pueden ser construidos al mismo tiempo pero

no pueden ser presentados al mismo tiempo a la vista del sujeto. En esos casos de relaciones recto-verso se agrega la operación espacial o infralógica de "inversiones".

Una relación próxima a la incompatibilidad y sin lugar a dudas tan frecuente como ella es la simple exclusión recíproca $[(p \,.\, \bar{q}) \vee (\bar{p} \,.\, q)]$ que no se ocupa de $(\bar{p} \,.\, \bar{q})$ o sea de "ni lo uno ni lo otro"; la diferencia entre las dos tiene que ver con el empleo y la significación de la negación. Hay aquí un problema esencial desde el punto de vista de la lógica de las significaciones. En una lógica extensional fundada solamente sobre tablas de verdad los términos que contienen la negación de p en la implicación $p \supset q = (p \,.\, q) \vee (\bar{p} \,.\, q) \vee (\bar{p} \,.\, \bar{q})$ se refieren a todo lo que no es p en el universo del discurso aun manteniendo la verdad de q. De allí resultan las implicaciones paradojales que se trata de evitar a toda costa. Ahora bien, en una lógica de las significaciones la negación sólo interviene refiriéndose a una imbricación bien definida. Por ejemplo, en un agrupamiento en el cual $B = A + A'$ la negación $\bar{A}$ interviniente en la expresión $A' = B \,.\, \bar{A}$ solamente tiene sentido con referencia a la imbricación de A en B. Es pertinente entonces distinguir "negaciones proximales" vinculadas con la imbricación más próxima y "negociaciones distales" referentes a fronteras cada vez más alejadas.

Es conveniente entonces recordar la evolución de las negaciones o exclusiones, según los niveles evolutivos, e intentar explicarla. En términos generales, se puede decir que el desarrollo conduce de las negaciones distales que parecen más primitivas a las negaciones proximales que se afinan con la edad. La razón de esas transformaciones tiene que ver naturalmente con la de los referenciales mismos. Pero conviene de inmediato notar que hemos utilizado esa noción en dos sentidos diferentes aunque próximos. Acabamos de emplear este término en el sentido de imbricaciones, con respecto a las cuales las conjunciones buscadas son posibles o deben ser excluidas. Pero, a propósito de los niveles I y II, hemos hablado de "pedazos referenciales" para designar un pedazo que se conserva invariante y con respecto al cual se organizan los otros en conjunción. Al comienzo los sujetos solo utilizan un único trozo como referencial, de tal manera que los elementos susceptibles de completarlo en un objeto total son poco numerosos y existe un gran número de pedazos para excluir, de allí el carácter distal de las negaciones. Por el contrario, en el nivel II, el sujeto puede utilizar varias piezas referenciales a la vez, según que se trate de los P, de los C o de E. Por ese hecho las negaciones se hacen cada vez más próximas porque se trata de tres sistemas a completar separadamente aunque solidariamente.

Desde un punto de vista general las negaciones utilizadas constituyen entonces una especie de medida o de índice del grado de las diferencias. Es lo que hemos visto antes con B. Inhelder en una investigación en donde también verificamos el carácter más tardío

de las negaciones proximales: *"un caillou est* plus pas *une marguerite que ne l'est une primevere"* nos dijo, por ejemplo, un niño, y su expresión "plus pas" significaba naturalmente que hay más diferencia entre un guijarro y una flor de la que existe entre dos objetos que son ambos flores.

A las diferentes relaciones preoperatorias que acabamos de discutir se agrega la relación de "equivalencia". En el caso de las cuatro maneras de recortar y luego de reconstituir una manzana hay naturalmente equivalencias, no solamente en los resultados (cuatro manzanas parecidas) sino también en los métodos procedurales, porque se trata ante todo de evitar las discontinuidades en los diferentes puntos de contacto, o sea hacer manzanas bien redondeadas, con una buena forma. En cuanto a las disyunciones no exclusivas, o sea las intersecciones, el sujeto no construye tales disyunciones explícitas, pero constatamos algunas implícitas. Las manzanas que el sujeto reconstituye pueden por ejemplo ser repartidas en dos clases por relaciones interfigurales: las que presentan menos de cuatro pedazos (*P1, P2, P3*); las que comportan más de dos pedazos (*P3* y *P4*); mientras la manzana de tres pedazos constituye entonces la parte común ($p \cdot q$) por oposición a las otras dos ($p \cdot \bar{q}$), ($\bar{p} \cdot q$).

En resumen, de las 16 relaciones isomorfas a las futuras operaciones binarias, encontramos 10 que están representadas en las versiones de nuestros sujetos, siendo las 6 restantes la tautología, la negación total y las afirmaciones o negaciones de p o de q (es decir $p \cdot \bar{q}$ o $\bar{p} \cdot q$, etc.). Las 10 relaciones utilizadas son todas ellas relaciones entre significaciones sin recurrir a la tabla de verdad fundada sobre la extensionalidad, no interviniendo ésta sino en las imbricaciones parciales gobernadas por las significaciones y sus "inherencias".

VI. La negación y la incompatibilidad interobjetales

con la colaboración de L. Banks y A. Wells

Las relaciones entre trozos de objetos que hemos visto en el capítulo V se refieren a la vez al dominio intraobjetal relativo a la composición interna de los objetos y a las relaciones "infralógicas" caracterizadas por las relaciones de vecindad, de continuidad y de separación. Completamente diferente es el dominio lógico-aritmético que se refiere a las relaciones entre objetos discretos, donde las totalidades en juego son clases o colecciones y no objetos con conexiones continuas entre sus partes. Naturalmente, en ambos casos se encuentran ciertas formas de conjunciones y de exclusiones, de implicaciones o de incompatibilidades, etc., que caracterizan las actividades del sujeto. Pero cabe preguntarse si son las mismas y sì evolucionan de manera análoga en los diferentes niveles de desarrollo, en particular desde el punto de vista de las acciones o preoperaciones y de sus implicaciones significantes. La diferencia principal es naturalmente que, fuera de las acciones separadoras de un sujeto, es difícil considerar a los objetos de la naturaleza como si fueran "trozos de objetos", en tanto que en el caso de separaciones que son obra de un sujeto cualquiera, otro sujeto percibirá de inmediato la incompletud de esas piezas tomadas cada una por su lado, o sea su aspecto negativo. Por el contrario, si se trata de dos clases *A* y *B*, y de los *C* (que no son ni *A* ni *B*), el sujeto buscará los caracteres comunes positivos de esos *C* antes de constatar que no los tiene y que es necesario resignarse a verlos como ni *A* ni *B*. Resulta pues útil volver a los problemas de negación y de incompatibilidad pero en el plano interobjetal.

SECCION I
LA NEGACION

Ya hemos estudiado en múltiples oportunidades la negación, pero con técnicas diferentes de las que utilizaremos aquí, las cuales nos proveen un cierto número de informaciones nuevas. La primera de ellas consiste en mostrar un objeto al niño y preguntarle todo lo que ese objeto no es o incluso "todo lo que no se puede hacer con él" (la significación de un objeto es, entre otras, "lo que se puede hacer con él"). En esos casos el referencial con respecto al cual hay negación debe ser elegido por el niño. Por otra parte, se puede presentar al sujeto una decena de objetos, designar uno de ellos y decir lo que no es, y eso puede conducir a utilizar como referencial al conjunto de esos objetos. Tomadas aisladamente, esas dos preguntas son naturalmente insuficientes. La primera puede no dar lugar más que a producciones verbales y la segunda solamente a exclusiones sucesivas en acción, pero sin ningún intento de clasificación previa. Por eso utilizaremos una técnica más precisa que consiste en poner una pantalla que separa al niño de uno de los experimentadores. Delante del niño se ubican diversos objetos entre los cuales eligirá uno. El experimentador que está enfrente debe adivinar cuál es, en función de las informaciones provistas por el sujeto, pero éstas deben ser todas negativas: decir lo que el objeto no es. Por ejemplo, si los objetos son tres (dos bolitas rojas y un caballo) y el sujeto elige este último, le bastará con decir al experimentador que ese objeto no es rojo y que no es una bolita para que el experimentador deduzca que es el caballo. Luego se cambian los roles: es el experimentador quien da las informaciones y el niño quien extrae las conclusiones. La técnica siguiente consiste en clasificar los objetos en colecciones cada una de las cuales, una vez construida, debe llevar un nombre. Luego se pregunta si se puede poner un objeto de una colección *A* en otra colección *B*. Si el sujeto responde que no, se le pregunta por qué. Si responde que sí, se le pregunta si es necesario entonces cambiar el nombre de las colecciones y cómo llamarlas. Finalmente se introduce en esas colecciones un objeto nuevo bien diferente que llamaremos "el intruso" preguntando si "va bien" con los otros y porqué sí o no.

1. Nivel I

Veamos algunos ejemplos de IA.

HEL (3;9) Cuando se le presenta una lapicera dice: "*—Es un lápiz.* —¿Qué es lo que no es? *—Nada.* —¿Qué es lo que no se puede hacer con él? *—No sé.* —¿Qué se puede hacer con él? *—Marcar en una hoja.* —¿Y esto (rombo) qué es? *—Un barrilete.* —¿Qué es lo que no es? *—No tiene hilo.* —¿Qué es lo que no se puede hacer con él? *—Nada.* —¿Y lo

que se puede hacer? —*Se remonta y se corre con él.* (Se presenta un círculo incompleto.) —*Es una pulsera rota.* —¿Qué es lo que no es? —*No hay nada; está solo".* Utilizando una pantalla con cambio de rol (dos autitos, tres animales, una bolita): "—No es un auto y no es un animal. ¿Qué es? —*Un animal y un auto.* —Pero te digo que no es un animal y no es un auto. —¿Qué es? (La niña muestra el conjunto). —*Es todo eso.* —¿Pero qué es lo que tú elegiste? —(Muestra el auto rojo y luego el cochinito)". Con el objeto "intruso": *"Todo va bien junto"* (incluido el "intruso" que es un chocolate en medio de un conjunto de frutas).

MAT (3;9). Se presentan mezclados un bolígrafo, dos marcadores, una lapicera, pinceles y una goma: "—¿Qué es esto? —*Un lápiz.* —¿Puedes decir lo que no es? —*No sé.* (A pesar del referencial constituido por los siete objetos). —¿Qué más hay? —*Son todos lápices.* —¿Qué es lo que no se puede hacer con ellos? —*No se puede dibujar en la pared, en una mesa o en las tijeras.* —¿Y qué es esto? (una goma). —*Un redondel.* —¿Qué es lo que no es? —. . . —¿Qué se hace con esto? —. . . —¿No se te ocurre nada? —*No . . ."* Con la pantalla: fracaso completo. En la situación de cambio de rol: "Si te digo que no está hecho en madera y que no es un animal, ¿entonces qué es?" muestra un cordero pero también el auto de plástico (correcto).

NEV (4;4) afirma a veces que un lápiz no es un lápiz y que un bolígrafo no es un bolígrafo. Pantalla: La niña muestra sucesivamente todos los objetos sin tomar en cuenta las negaciones. Cambio de rol: "—¿Si te digo que no es azul? —*Aquel porque es azul.* —No es una fruta. —(Muestra la pera). —No es una pera, no es una naranja, no es una manzana. —*Es la naranja".* Cuando la niña trata de designar un conjunto con un término colectivo el término elegido no se aplica a todos los elementos de esta colección: la que llama "animales" comprende un caballo, un puerquito, una bolita y un prisma; parece entonces claro que las negaciones son tan mal comprendidas por falta de imbricaciones.

SON (4;6) no puede clasificar los objetos en colecciones y procede por pares más o menos heterogéneos, como un acordeón con un teléfono, etc. Para el bolígrafo dice: "—*Es un bolígrafo.* —Quisiera que dijeras lo que no es. —*No es un bolígrafo.* —Pero acabas de decir que es un bolígrafo. —*No es un bolígrafo pero es un lápiz.* —¿Entonces es un lápiz? —*Sí.* —¿Pero qué es lo que no es? —*No es un lápiz, ni una mesa, ni una silla, ni un anteojo, ni un muñeco"* (objetos que están sobre la mesa). Hay aquí un comienzo de negaciones con referenciales visibles, o sea el comienzo del nivel IB.

Veamos ahora casos intermediarios (IB) entre los niveles IA y II.

JEA (4;6). Se presenta un rombo: "—¿Qué es lo que no es? —*Un triángulo.* —¿Y qué más? —*No hay nada más".* Se presenta un círculo incompleto: *"—No es un cuadrado y no es un triángulo . . . no se me ocurre nada más".* Bolígrafo: "—¿Qué es lo que no es o qué es lo que no se puede hacer con él? —*No se puede hacer una casa.* —¿No se puede dibujar una casa? —*Sí.* —¿Qué más? —*No es un oso, no es un elefante, no es un cucú".* Pantalla: "—*No es un árbol, no es una casa*", etc., enumerando todos los objetos salvo el que ha sido elegido. Cambio de rol: "—No es un auto ni un animal. ¿Qué es? —*Es un auto*".

DEL (4;3). Se presenta un rombo: "—¿Qué es lo que no es? —*No sé . . . no es para hablar".* Pantalla con roles invertidos: "—No es un animal y no es un auto. —*Elegiste el cordero.* —¿No es un animal? —*Sí.*

—(se saca la pantalla y se repite la doble negación). *Es un cordero"*. El intruso: respuesta correcta.

SEV (4;0). Se presenta un rombo: "—¿No es qué? —*No es.* —¿Pero no es...? —*Eso.* —¿Es un auto? —*No.* —¿Qué más? — . . .". Círculo incompleto: "—*Es la cabeza.* —¿Y qué no es? —*El cuerpo*". Bolígrafo: "—¿Qué no es? — . . . —¿Qué es lo que no se puede hacer con esto? —*Escribir.* —¿No se puede escribir? —*Escribir.* —¿Entonces qué es lo que no se puede hacer? —*Un globo, un árbol,*" etc. Pantalla con cambio de rol: "—No es un auto, no es un animal. —*Es un cordero* —(se saca la pantalla y se repite la doble negación). —*Es la bolita* (correcto). —No es verde y no es un muñeco. —*Es el teléfono* (correcto)". Intruso: Respuestas iniciales correctas, pero para varios objetos heterogéneos *"todo va bien junto"* por falta de imbricaciones jerarquizadas.

Se ve así que en el nivel IA se fracasa en todas las negaciones: el niño no encuentra lo que un objeto no es; en las preguntas de la situación con pantalla, si el objeto elegido no es ni *x* ni *y*, etc. Esa carencia de negaciones se acompaña de dos lagunas o defectos sistemáticos en la construcción de las imbricaciones y en la significación de la expresión "todo va bien junto", explícita en *Hel* y en *Sev* e implícitas en los otros. El primero de estos caracteres defectuosos consiste en situar en una colección elementos que no le pertenecen, como por ejemplo hace *Nev* al poner una bolita y un prisma en un conjunto llamado "de los animales". El segundo, próximo al primero, consiste en confundir un todo con una de sus partes, como lo hace *Mat* al decir que siete objetos heterogéneos son todos "lápices". En los dos casos hay confusión entre el todo y las partes, o entre la extensión y la comprensión, lo que equivale a confundir las "conjunciones libres" (por medio de las cuales se han reunido algunos objetos cualesquiera) con las "conjunciones obligadas" fundadas en una comunidad de significaciones que reúnen "lo que va bien junto" en una clase de caracteres comunes.

En ese caso se puede distinguir en estos niveles elementales, una forma inicial de conjunción que no es aún la futura "conjunción obligada" (poner junto un puerquito y un caballo porque los dos son animales y son inseparables desde ese punto de vista), ni tampoco "conjunción libre" (por ejemplo una bolita y un pájaro porque están próximos en un mismo paquete espacial en extensión, independientemente de las significaciones en comprensión, y son entonces separables): es lo que llamaremos las "conjunciones seudoobligadas", en analogía con las "seudonecesidades" estudiadas en investigaciones anteriores (confusión entre lo general y lo necesario). [1] Siendo así, los sujetos del nivel IA pueden introducir en una colección que se les presenta (o que ellos han construido) un conjunto de "conjunciones seudoobligadas" en grados diversos y variando según las presentaciones.

[1] J. Piaget, *Le possible et le nécessaire*, v. II, *L'évolution du nécessaire chez l'enfant*, París, P.U.F., 1983.

Se comprenden entonces mejor las paradojas de la negación. Cuando se le dice al sujeto: "No es un animal ni un auto" él infiere que si esos dos conjuntos son especialmente mencionados es porque juegan un rol de conjunciones seudoobligadas con respecto a los objetos vecinos; de allí que la afirmación predomine sobre las negaciones, por el hecho de esta mención privilegiada. De la misma manera, cuando el niño dice que un objeto es un lápiz y dice también que no lo es, eso puede deberse al rol variable que puede jugar en el seno de los elementos con los cuales está siendo comparado: a veces una relación de conjunción seudoobligada, es un lápiz; a veces una relación de conjunción libre y ya no lo es más.

En pocas palabras, la dificultad de las negaciones del nivel IA es relativa al carácter mal estructurado de las conjunciones constitutivas de lo que "va bien junto" o sea los comienzos de imbricaciones. En efecto, su significación es múltiple y contradictoria, desde las simples reuniones heterogéneas a las conjunciones libres y arbitrarias, hasta los ensamblajes fundados sobre cualidades comunes como "los animales", pasando por conjuntos fundados sobre conjunciones seudoobligadas de diversos grados. Por falta de referenciales estables y suficientemente diferenciados, las exclusiones o negaciones no podrían presentar significaciones generales. La dificultad de la negación consiste en que ello supone dos momentos sucesivos: 1) la construcción de una conjunción posible entre un *x* y uno o varios *y* (sin lo cual no se podría decir nada, como lo afirma *Hel*, a propósito del círculo incompleto: lo que "no es" se reduce a "nada"; está solo); 2) la negación de esta conjunción. En otros términos, decir que *x* "no es azul" significa que podría serlo y, si la conjunción en juego es concebida por el sujeto como "seudoobligada", desprecia la negación en beneficio de "lo que podría ser".

En cuanto al nivel IB el progreso consiste en el perfeccionamiento de las imbricaciones, y de allí un progreso de las negaciones a pesar de que aparecen errores del tipo IA.

2. Nivel II

Desde ese nivel operatorio las imbricaciones se hacen coherentes, proveyendo así referenciales a las negaciones que se extienden rápidamente a las negaciones distales.

> *JOE* (7;3). En el caso del objeto intruso clasifica aparte los tres tipos de frutas; después del agregado de los chocolates clasifica en *"frutas y chocolates"*. Cuando se agrega una bolita reparte el todo en dos: *"Todo lo que se come y lo que no se come"*.

> *FAB* (7;6). Cita más de 12 objetos para designar lo que el bolígrafo "no es". En la situación de la pantalla permite al interlocutor encontrar el objeto elegido fundándose sobre las indicaciones negativas; las formula

tan fácilmente que después del cambio de rol encuentra el objeto gracias a las negaciones del experimentador. Solamente formula una negación no pertinente: "*No es de hierro*", pero reconoce de inmediato que esta negación no sirve "*para nada*".

GIA (8;10). Idénticas reacciones. Comienza por decir: "*—No es una pelota, no es un auto.* —¿Crees que eso basta? *—No; no es un perro, no es un techo*" (prisma).

BOR (8;6). Un bolígrafo "*es una cosa que no es como nosotros*" (personaje) y "*no son animales*". Para clasificar los objetos *Bor* razona en términos de "familias": junta los palos verdes porque "*son de la misma familia*" lo que hace también con los personajes de madera, sin poner el teléfono y la goma. En la situación de la pantalla, las informaciones "no es verde, no es color café y no es un personaje" le permiten encontrar que es "la vaca" (correcto). En otro caso se da cuenta con razón que la información es insuficiente.

SYL (9;11). Pantalla: muestra los objetos diciendo "*por ejemplo, si no son muñecos, ni un árbol, sería entonces el teléfono*". Elige el árbol: "*No es verde claro y no son muñecos.* —¿Eso basta? *—No, porque podría decir que es esto* (teléfono). *Hay que decir: no es verde y no es un muñeco*". Otro conjunto con cambio de rol: objetos rojos, dos animales y una bolita y da como información: "Ni rojos ni animales; solamente puede ser la bolita".

LOR (10;3). Pantalla: "—Puedes decir tres cosas para que el otro adivine (hay palitos verdes, un prisma rojo, un árbol y un caballo). *—No es verde, no es rectangular, no es un animal.* —Entonces es el prisma rojo". Con una pelota, una muñeca roja, el prisma, un teléfono y un pito: "—Esta vez no puedes decir más que dos cosas. *—No es rojo no se puede soplar por dentro.* —Es el teléfono entonces. *—Sí*".

El progreso en la construcción de las imbricaciones (o "familias" como dice *Bor*) no conduce solamente al correcto empleo de las negaciones, sino también a dos novedades que hay que señalar. La primera es que ahora el sujeto distingue, como *Syl*, las informaciones suficientes de las que no lo son, lo que supone una repartición posible de las imbricaciones en subconjuntos coordinados. La segunda novedad es que ahora la prueba de la pantalla es igual de fácil cuando el sujeto debe formular las negaciones sobre los objetos que ha elegido que en el caso de cambio de rol cuando el experimentador indica "no es un *x* ni un *y*", etc. Hay allí una posición curiosa, que dura hasta el nivel II, y se agrega a lo que hemos visto de la dificultad general para encontrar y utilizar las negaciones. En el caso de los cambios de rol por el contrario, las negaciones son provistas por el interlocutor y el sujeto solamente debe deducir las consecuencias, en tanto que en el nivel II el sujeto las imagina y las indica con tanta facilidad como infiere los resultados. Ese progreso debe ponerse en relación con lo que acabamos de ver del carácter suficiente o insuficiente de las informaciones, y equivale a decir que hasta el nivel II las negaciones encontradas por los sujetos son más difícilmente suficientes que las que se le proveen.

SECCION II
LA INCOMPATIBILIDAD

Hemos hablado de la incompatibilidad en el capítulo V y volveremos a hacerlo aquí, limitándonos a la técnica principal empleada en esta investigación. El material consiste en dos juegos de tarjetas, uno para ser usado por el niño y otro por el experimentador. Uno de esos juegos está constituido por imágenes de animales (4 cuadrúpedos, 4 pájaros, 4 insectos, 1 serpiente, 1 anguila, 1 pez); el otro juego está constituido por imágenes de vegetales (4 flores, 4 frutas, 3 legumbres, 2 hongos, 2 helechos, 1 líquen, 2 algas). Se entrega el juego de animales al niño, indicándole que haga una clasificación espontánea (que ponga juntas las imágenes que "van bien juntas"). Una vez terminada esta clasificación, se le pide que denomine los grupos formados. En una segunda parte, el experimentador clasifica el juego de imágenes de vegetales según el principio de incompatibilidad: las flores en un grupo, las frutas en otro, y el resto en el último grupo. Se pide entonces al niño que dé un nombre a cada uno de estos montones, y luego, que trate de efectuar una clasificación similar a la del experimentador, pero utilizando sus propias imágenes (animales), y que dé un nombre a los montones resultantes. En este caso se pueden distinguir cuatro niveles.

3. Nivel I (4-6 años)

Veamos algunos ejemplos.

NEV (4;4) solamente procede por pares heterogéneos (pez + araña, etc.); luego, al ver los tres grupos del adulto hace también tres grupos: (1) cochinito, hormiga, perro y araña llamados *"montón de cochinitos"*; (2) asno, pez y dos pájaros llamados *"montón de los perros"*, y luego los llama *"montón de los pájaros"*. Se encuentra aquí la confusión de las partes y del todo (pars pro toto) señalada antes en este nivel.

SON (4;7) forma cuatro grupos, cada uno de los cuales contiene un pájaro y uno solo de ellos es homogéneo (la serpiente y la anguila) y cuando se trata de hacer como el modelo propuesto se limita a contar los elementos para formar grupos del mismo número, obteniendo tres grupos nombrados (como Nev) en función de uno solo de sus elementos.

CAR (5;2) presenta idénticas reacciones y cuando se le muestra el modelo diciéndole explícitamente "aquí las flores, aquí los frutos y allá es un montón donde no hay flores ni frutos. ¿Entiendes? —*No*".

SYL (6;7) marca progresos netos en la clasificación que propone en cinco grupos: *"Allá los insectos, allá todo lo que se arrastra, allá todo lo que vuela, allá todo lo que vive en el agua y allá todo lo que corre rápido"*. Pero no comprende para nada el modelo propuesto a pesar de las designaciones (allá las flores, allá las frutas y allá el resto).

Estas reacciones iniciales ponen en evidencia el parentezco que unen las negaciones con las imbricaciones inclusivas: de la misma manera que unir objetos porque presentan cualidades comunes (conjunciones obligadas) implica la necesidad de excluir de esas reuniones los elementos que no presentan esas cualidades, también la negación o la simple exclusión solo tiene sentido con respecto a una imbricación (inherencia de significaciones). Como los sujetos no llegan aún a construir tales colecciones (y solo las designan por uno de sus miembros y no por su significación colectiva) no comprenden el principio del modelo propuesto por el adulto y no ven nada de negativo en la colección *C* a pesar de que se les dice que no son ni *A* ni *B*. En otros términos, no ven en *C* el producto de "conjunciones libres" por oposición a los *A* y a los *B* que resultan de conjunciones obligadas (a causa de sus significaciones comunes) sino que atribuyen a los *C* relaciones que podemos calificar de "conjunciones seudoobligadas" en correspondencia con aquellas que hemos mencionado en la sección I a propósito de las dificultades de la negación. Hay entonces, convergencias instructivas a pesar de la diferencia de las técnicas utilizadas y de las preguntas planteadas, lo que nos reasegura con respecto al fundamento de nuestras interpretaciones. Recordemos, además, en lo que se refiere a la confusión de las partes y del todo en la caracterización y la denominación de las colecciones construidas por los sujetos, que se reencuentra este fenómeno incluso en el dominio de las relaciones numéricas: como se observa frecuentemente en este nivel elemental ciertos sujetos de este nivel I llegan a creer que 10 unidades extraídas de un conjunto de 30 o 40 elementos hacen más que 10 extraídas de un conjunto de 20. [2]

4. Niveles II y III

En el nivel IIA que es el de las imbricaciones operatorias, los sujetos intentan por diversos medios de caracterizar la clase C (o sea ni *A* ni *B*) por otras imbricaciones sin alcanzar la negación ni *A* ni *B*, pero aproximándose a ella en ciertos casos cuando esos elementos son definidos como siendo "los otros".

JAN (6;7). Llega a hacer tres clases: A los animales de dos patas; B los que tienen cuatro patas y C "los que tienen muchas patas". "—¿El pez tiene muchas patas? —*Los pongo fuera* (= inclasificables)".

AND (6;8): *"Es difícil dar un nombre porque hay muchas cosas".*

[2] B. Inhelder y J. Piaget, "De l'itération des actions a la récurrence élémentaire". En P. Gréco, B. Inhelder, B. Matalon y J. Piaget, *La formation des raisonnements récurrentiels* (Etudes d'Epistémologie Génétique, vol. XVII, París, P.U.F., 1963.

CLA (7;0). La clase *C* = *el resto*", y luego "*los otros*". por lo tanto una diferencia en lugar de negaciones.

JOE (7;3). El grupo C = "*es todo junto*" (significando un desorden).

DAV (7;4). "*Las frutas, las flores y* (C) *las cosas que crecen*".

FAV (7;6). "*Los que no van juntos*" (= no subdivididos en el interior de C).

RIC (8;6). "*Los que tienen pelos, los pájaros y los otros*".

SAI (8;6). C = "*Todo para hacer de comer, que se puede poner sobre la carne.*"

JUL (9;5). "*Está todo mezclado.*"

Obligados por la consigna de limitarse a tres clases (*A*, *B* y *C*) vemos cómo esos sujetos se dan cuenta de que los *C* son incompatibles con los *A* y los *B* pero no llegan a la negación explícita (*C* = ni *A* ni *B*) y se limitan a una exclusión en acto de donde resultan tres tipos de reacciones. La primera consiste en tratar de encontrar una cualidad común a los *C* comparable a la de los *A* y los *B*: "*Muchas patas*" (*Jan*), "*las cosas que crecen*" (*Dav*), "*para hacer de comer*" (*Sai*). La segunda reacción equivale a decir que "está todo junto", (en desorden) (*Joe*) o que "está todo mezclado" (*Jul*) o "los que no van juntos" (*Fab*), lo que significa que habría que repartirlos en subclases comparables a los *A* y los *B* pero aceptando que sean más de tres clases. La tercera reacción que se acerca más a la doble negación ni *A* ni *B* consiste en nombrar a *C* "los otros" (*Cla*, *Ric*, etc.) o "el resto" (*Cla*) lo que constituye en cierto sentido una doble negación pero expresada en términos de "diferencias" positivas y no de negaciones explícitas.

Solamente en los niveles IIB (9-10 años) y III la cualidad común a los *C* es expresada bajo forma negativa (ni *A* ni *B*); en otros términos la negación es tematizada sin permanecer implícita.

DID (8;2): A = "*Insectos*"; B = "*Los que no tienen patas*"; C = "*No son insectos y no son los que no tienen patas*".

COR (8;5): C = "*Los pájaros no son insectos*" o sea ni A ni B según las clases adoptadas.

MAT (8;6): "*Es lo que no son insectos* (=A) *ni cosas que vuelan* (= B)".

JOA (9;3): "*Son los animales sin pelos y sin alas emplumadas*".

ICA (9;10): "*Son animales que no van con aquellos* (A y B)".

LOR (10;3): "*Los que no son pájaros* (A) *y no son insectos* (B)".

MIR (10;3): *"Se los puede llamar ni flores ni frutos; es un poco largo pero va".*

PIE (12;5): *"Se les puede llamar ni flores ni frutos; a los animales se les puede llamar «no insectos y no reptiles»".*

Comparando estos resultados con los de la sección I constatamos un cierto retardo de la incompatibilidad explícita sobre las soluciones de los problemas precedentes, sobre todo los problemas relativos a la situación con la pantalla. Parecería ser que en esta última situación el sujeto debe partir de negaciones dadas "no es *x*, y *y*, *z*" etc. o debe construirlas desde el comienzo para deducir cuál es el objeto elegido. Por el contrario, en los problemas que analizamos ahora el sujeto parte de imbricaciones positivas —los *A* y los *B*— y solamente puede caracterizar a "los otros" por la doble negación "ni *A* ni *B*". De allí la búsqueda de una cualidad común a los *C*, o los calificativos "los otros" y "el resto", significando tanto a "los que quedan por clasificar" antes que la expresión "ni *A* ni *B*" tome un valor suficiente de información, pero menos decisiva que las negaciones dadas en la situación con la pantalla de la sección I.

VII. El tejido en telar

con la colaboración de G. Piéraut-Le Bonniec y E. Rappe du Cher

El material utilizado consiste en dos dispositivos de telares, marcos de madera (25 cm de ancho y 50 cm de alto) sobre los cuales se fijan, en el sentido de la altura, cintas de 2 cm de ancho que servirán de *hilos de cadena*. Alternativamente hay una cinta de color claro (rosa, amarilla y anaranjada) y una cinta de color oscuro (púrpura, azul marino y verde oscuro), de donde resulta la alternancia rosa (*r*), púrpura (*p*), amarillo (*j*), azul (*b*), anaranjado (*o*), verde (*v*). Cintas blancas (*B*) y negras (*N*) juegan el rol de hilos de trama, pasando alternativamente por encima y por debajo de cada uno de los hilos de cadena. Las cintas blancas son utilizadas para las filas impares y las cintas negras para las filas pares. Si la fila 1 comienza por un entrecruzamiento *B/r* (= cinta blanca sobre cinta rosa) se tendrá la serie: *B/r*; *p/B*; *B/j*; *b/B*; *B/o*; *v/B* (cf. cuadro 1a). En la segunda fila se dispone luego una cinta negra de tal manera que la alternancia de la fila precedente resulte invertida: allí donde el hilo de trama blanco pasaba por encima del hilo de cadena y lo ocultaba, el hilo de trama negro pasa por debajo y deja ver el hilo de cadena (confróntese fila 2 en el cuadro 1a). En la fila 3 una nueva inversión de la alternancia lleva a la disposición de la primera fila porque el sistema es cíclico. Como se puede ver en el cuadro 1, el dibujo del tejido así obtenido ofrece a la vista una alternancia claro/oscuro que aparece bajo forma de columnas (= modelo en columnas).

Cuadro 1. Los dos modelos inversos

(1a) *Modelo en columnas*

		c	f	c	f	c	f
1a. línea	arriba	B	p	B	b	B	v
	abajo	r	B	j	B	o	B
2a. línea	arriba	r	N	j	N	o	N
	abajo	N	p	N	b	N	v

Entrecruzamientos posibles:

Para las columnas claras $\frac{B}{c}$ o $\frac{c}{N}$

Para las columnas oscuras $\frac{f}{B}$ o $\frac{N}{f}$

(1b) *Modelo en líneas*

1a. línea	arriba	r	B	j	B	o	B	línea c
	abajo	B	p	B	b	B	v	
2a. línea	arriba	N	p	N	b	N	v	línea f
	abajo	r	N	j	N	o	N	

Entrecruzamientos posibles:

Para las líneas claras $\frac{c}{B}$ o $\frac{B}{f}$

Para las líneas oscuras $\frac{N}{c}$ o $\frac{f}{N}$

N = negro B = blanco c = claro f = oscuro

c	r = rosa j = amarillo o = anaranjado	f	p = púrpura b = azul oscuro v = verde oscuro

En lugar de comenzar haciendo pasar la primera cinta blanca *por encima* de la cinta rosa, se puede comenzar por hacerla pasar *por debajo*; como se puede ver en el cuadro 1b, esto basta para obtener un dibujo diferente del primero porque esta vez la alternancia claro/oscuro aparece en líneas (= modelo en líneas).

Para ver cuál es la representación que los sujetos se hacían del sistema, se puso a su disposición pequeños cubos imantados de cuatro tipos: blancos, negros, crema (para simbolizar las cintas claras) y color café (para simbolizar las cintas oscuras); esos cubos fijados entre sí permiten figurar los cuatro entrecruzamientos característicos de cada modelo.

La experiencia se desarrolló de la manera siguiente: Se presenta primero al sujeto el modelo en columnas diciéndole que mire bien cómo están dispuestas las cintas. Luego se da al niño un telar virgen, idéntico al modelo pero que solo tiene los hilos de cadena fijados a los marcos de madera; la tarea del sujeto consiste en

ubicar correctamente los hilos de trama, según las seis situaciones siguientes:

1. Ubicación del primer hilo de trama: realización de una alternancia. (Si el niño comete errores, se rectifica para poder pasar a la prueba siguiente.)
2. Ubicación del segundo hilo de trama: realización de la inversión.
3. Ubicación del tercer hilo de trama: realización de un ciclo.
4. Previsión a distancia de los tipos de entrecruzamiento: el emplazamiento de cada una de las cintas blancas y negras está marcado en los marcos del telar a la derecha y a la izquierda, y se pide al sujeto que anticipe cómo será el entrecruzamiento entre hilo de cadena e hilo de trama en tal o cual punto del telar.
5. Realización del modelo inverso: se presenta al sujeto el modelo en líneas y se le pide que lo realice en la parte aún no utilizada de su telar.
6. Representación de los dos modelos inversos por los cuatro entrecruzamientos que los definen: se pide a los sujetos que muestren con la ayuda de los cubos imantados cómo se cruzan las líneas en cada uno de los modelos.

Se interrogaron 20 niños, entre 4 y 12 años, cuyas respuestas fueron grabadas. Las soluciones que los sujetos han dado a estos problemas nos permiten distinguir tres niveles con subniveles.

1. Niveles IA a IC

Veamos un ejemplo de IA.

RIC (4;3) formula una bella implicación: "*el B pasa por debajo de aquél porque se le encuentra del otro lado*". Sabe decir que los modelos son diferentes y mostrar las diferencias locales entre dos hilos de trama vecinos, pero no llega a realizar una alternancia correcta sobre su propio telar virgen. Sin embargo declara: "*se hace hacia abajo y después hacia arriba.* —¿Y si se hiciera siempre lo mismo? —*Se cae pero si es abajo y* (después) *se va arriba no se cae*". Sin embargo continúa cometiendo errores en las realizaciones y termina diciendo: "*El B y el N no es lo mismo; el B está hecho para poner por debajo*" (por lo tanto pone todo el N por debajo; luego corrige).

Veamos un ejemplo de IB.

RAP (4;7) logra ubicar bien los B en su telar: "—*Una vez allá* (debajo de *r*) *una vez allá* (sobre *p*) etc. —¿Estás seguro? —*Sí porque era como aquél* (sobre modelo). —¿Y los N? —*Es lo mismo que el B* (los ubica efectivamente de manera similar por falta de inversión: N debajo de r, luego sobre p, etc.). *Hacen lo mismo.* —¿Tú B es como el del modelo?

—*Sí.* —¿Y tu N? —*No, hay algo que no va".* La niña hace una corrección local de donde resulta esta vez un error en la alternancia en línea (dos N seguidos sin B entre ambos). Intenta recomenzar todo y en realidad rehace lo mismo con errores en la alternancia, no logrando combinarlo con la inversión.

LAU (6;1) no logra de inmediato distinguir los dos modelos. Comienza en columnas. *"Estos* (los N y los B) *deben funcionar parecido".* Para anticipar un cruzamiento alejado necesita efectuar todos los precedentes.

Veamos un ejemplo de IC:

EME (6;3) logra finalmente conciliar la inversión y la alternancia pero después de numerosos errores, entre ellos 3B sucesivos por debajo de *p*, *j* y B y N semejantes a los B. Fracasa en la transposición sobre los imanes. Conclusión final: *"hay que rehacer todo porque ahora sé".*

En pocas palabras, este nivel I (de A a C) está caracterizado por un *mínimo* de inferencias y un conjunto de copias locales y empíricas de tal o cual aspecto de los modelos. *"Hice así con el dedo como si fuera la cinta"* dice por ejemplo *Eme*, poniendo el acento a veces sobre la alternancia y a veces sobre la inversión, sin lograr combinarlos inferencialmente y no llegando a su síntesis sino después de diferentes errores. En otras palabras, este primer nivel es el de acciones sucesivas con relaciones a posteriori, pero carente de implicaciones explícitas entre ellas y, por consiguiente, de anticipaciones con comprensión de las "razones" que tampoco son buscadas por el sujeto.

2. Nivel II

Desde los 7-8 años comienzan múltiples inferencias explícitas con empleo de términos tales como "porque" (razones) o "entonces" (consecuencias), que revisten interés por consistir en implicaciones entre acciones o sea entre significaciones conscientes. Sin constituir aún una estructura de conjunto formulada como tal, las implicaciones se insertan ya en un sistema de relaciones comprendidas paso a paso, que es próximo a un doble agrupamiento de seriación de los entrecruzamientos y de clasificación de los colores *c* (claros) y *f* (oscuros) en sucesión alternada.

Veamos ejemplos de IIA:

TIZ (5;2) fracasa primero en la alternancia de los B luego copia entrecruzamiento por entrecruzamiento y sigue fracasando; luego tiene éxito para los N. El modelo en líneas es resuelto correctamente de inmediato.

GIN (6;9) logra igualmente una alternancia en lineas con los B pero da la misma con los N: "—¿Está bien? —*No, porque hice como la B y no es el mismo color".* Da entonces la síntesis en columnas: B y N correctas con previsiones exitosas, pero después de varios errores corregidos.

Clasifica bien los colores *c* y *f* en la prueba de los imanes. "—¿Se puede tener B encima de *f* luego B sobre *c* en el mismo juego? —*Sí*. . . *no*. — Por qué? —. . . —¿Y N sobre *c* seguido de N sobre *f*? —*No, sí*. —Muéstrame dónde sobre el telar. —*No, no está*. —¿Por qué? —. . . —¿Entonces? —(corrige en *f* sobre N)".

GAN (8;11) muestra la diferencia entre los dos modelos y elige las columnas. Ubica correctamente los B; "—¿Estás seguro? —*Sí, está bien porque allá pasa por encima, en tanto que allá pasa por debajo y allá pasa por encima*. —¿Y los N? (ubica correctamente el primero)". Pero para anticipar una situación alejada está obligado a construir los intermediarios, teniendo en cuenta la alternancia de las dos clases oscura y clara, de los colores *N* sobre *c*, etc. Por ejemplo, constata *f* sobre *B*, *"entonces va a ser luego B sobre f"*. Pero llega a *N* sobre *c*, *f* sobre *N*, luego *N* sobre *c* seguido de *N* sobre *f*, de allí corrección en *f* sobre *N* y otros cambios locales que le impiden organizar el conjunto del sistema. "—¿Empezando por el *N* se va a encontrar la misma regla? —*No, va a cambiar la regla*".

Estos son ejemplos del nivel IIB:

BER (6;6) reproduce correctamente las dos series. "—¿Si pongo *B* sobre *c* piensas que habría algo diferente? —*Pienso que están ya allá* (los muestra correctamente). —¿Y si hiciéramos lo contrario, es posible? —*No, porque en el juego es el N que pasa encima de amarillo* (claro) —¿Y si se ponen los imanes (*c* sobre *B*, *B* sobre *f*, *c* sobre *N* y *f* sobre *N*)? —*No es correcto porque no es posible que sea así en el juego*".

TAM (8;6) también generaliza esta relación: *"—Es así en el juego; el N está siempre sobre un color claro y siempre debajo de un color oscuro*. —¿Y si tuviéramos ya estos dos allá? (*c* sobre *B* y *B* sobre *f*) se puede tener *N* sobre *c*? —*No, porque no lo veo así sobre el modelo*. . . *no es posible tener el B y el N que pasen por encima de los claros, si no tendría que haber dos claros lado a lado*". Se propone un intercambio de un *B* sobre un *f* de una serie, contra un *f* sobre *B* de la otra: *"no es posible en un telar; no lo veo así"*. *Tam* da primacía a lo que él puede hacer con los imanes con respecto a lo que él ve en los telares.

Lo propio de este nivel II es entonces el pasaje progresivo de las copias empíricas y locales del modelo (nivel I) a intentos por dominar el conjunto del sistema con sus leyes estructurales, de lo que resulta una mezcla de constataciones y de inferencias que las vinculan por implicaciones entre acciones. En el nivel IIA se encuentran ya ciertas previsiones exitosas, pero después de errores que son luego corregidos, en tanto que en el nivel IIB aparecen justificaciones que se expresan bajo la forma de "es siempre" así como se ve en el juego (*Tam*) o "no es posible" que sea así en el telar (*Ber* y *Tam*). Hay entonces búsquedas de la "razón" de una sucesión, pero aún limitadas a una referencia al modelo y no todavía a las condiciones intrínsecas de un tejido. Pero en el nivel IIB los sujetos se aproximan a estas razones más profundas a partir de lo que descubren al manipular los imanes.

En pocas palabras, este nivel II hace transición entre lo que sola-

mente era en el nivel I un esfuerzo de copias esencialmente empírico, con los errores y las lagunas que comporta el modo de conocimiento exógeno, y lo que en el nivel III se convertirá en una comprensión endógena de la "razón" de las leyes y hechos generales observados. Tal sucesión de los comportamientos equivale en cierta manera a duplicar, casi a reemplazar, el conocimiento físico inicial de los observables disponibles por un conocimiento lógico matemático de las estructuras en juego, o, dicho más simplemente, a construir un "modelo deductivo" indispensable para la comprensión del o de los sistemas presentados.

A este respecto los imanes juegan un rol esencial en tanto instrumentos de la construcción de tales modelos. Mientras que al principio (estadio I) no tienen más significación que la de agregar un problema más a aquellos que ya plantean los dos telares completos, adquieren en el nivel II la significación de símbolos que permiten una modelización a la vez amplia y en cierto sentido simplificada de los entrecruzamientos. En posesión de tal instrumento, los sujetos del nivel III llegarán entonces a aquello que solamente está esbozado en el nivel II: una comprensión efectiva y general de las relaciones en juego en los telares, relaciones que se hacían generales en el nivel II pero sin tener aún necesidad intrínseca.

3. Nivel III

Este último nivel es aquél en el cual el sujeto puede no solamente deducir las relaciones en juego, sino también justificar su carácter necesario, lo que constituye una búsqueda y un establecimiento de las "razones".

PAT (10;4) logra de inmediato las alternancias *"porque si el B pasa por encima de un color el negro debe pasar por debajo del mismo color"*. La predicción a distancia es correcta: *"aquí el B estará encima porque pasa siempre por encima del púrpura, por eso es obligatorio; se ve con el otro blanco que ya hicimos"*. Con los imanes: hace *B* sobre *c*, *N* sobre *f*, *f* sobre *B* y *c* sobre *N*. "—¿Se podría hacer otra serie? —(Da: *C* sobre *B*, *f* sobre *N*, *B* sobre *f* y *N* sobre *c*). —¿Y si quisiéramos hacer una tercera serie? *—Se podría empezar con los B por encima de los colores claros y los B debajo de los oscuros; y los N sobre los f y los B sobre los claros.* —¿Es una serie nueva? —(Mira los juegos) *¡Ah, sí, es la misma que la primera; solamente se pueden hacer las dos series que ya hicimos"*.

ROB (10;6) alternancias correctas con un error local inmediatamente corregido: "—¿Cómo te diste cuenta de que te habías equivocado? *—Comparando con el B; debe ser el contrario.* —¿Cómo será cuando tú llegues aquí? *—Será N debajo del color naranja.* —¿Por qué? *—Me fijo en el amarillo"*. Con los imanes forma dos grupos de tres: *N* sobre *c* que está sobre *B* y *B* sobre *f* que está sobre *N*, lo que traduce una comprensión efectiva de la estructura. "—¿Se puede tener *B* sobre *N*? *—No, no se puede.* —¿Y si pongo *c* sobre *B* y *B* sobre *c*? *—Depende de la cantidad de líneas; sería posible con un número par y aquí hay 9.* —¿Es

posible sobre el mismo telar tener al *B* pasando sobre *c* y también debajo de *c*? *—Ah no, no se puede porque hay siempre un hilo oscuro entre los dos.* —¿Se podría tener una *c* sobre un *B* y un *f* también por debajo de *B*? *—No, no es posible; serían todos por encima o todos por debajo.* —¿Se pueden hacer cambios entre las dos series? *—No es posible porque si el B está sobre el c no puede estar sobre un f*".

AUD (12;0) para el hilo de trama N2 con anticipación de un entrecruzamiento alejado. "*—Se puede saber cuando se mira sobre la misma línea; por ejemplo el N pasa por debajo del anaranjado y entonces se sabe que debe pasar por encima del verde y por debajo del rosa, o se puede simplemente mirar al otro blanco, porque todos los blancos hacen lo mismo*". Enumera de manera exhaustiva los diferentes referentes que le podrían servir para prever un entrecruzamiento. Se le propone un intercambio entre dos series de imanes. "*—En uno solo no, porque si uno* (de los juegos) *tiene un B que pasa sobre un color oscuro, enseguida el color claro no podría pasar debajo del N; sería lo contrario* (situación de las líneas)".

XYS (13;0). Llega incluso a proponer un único par de imanes para engendrar todas las otras posibilidades de entrecruzamiento. Hace el pasaje a lo simbólico a tal punto que nos propone series de pares que no pueden encontrarse en un mismo tejido. "*—Sí, si uno quiere que haga este juego* (columnas) *se dejaría c sobre N y sabría continuar.* —¿Cómo? *—Sí, uno solo basta porque se sabe que los colores claros pasan por encima de N, se sabe que los oscuros pasan debajo y para el blanco es obligatoriamente el contrario*".

La novedad de estas respuestas es que las inferencias de los sujetos no se limitan a lograr el "siempre, porque es así" o lo imposible "porque no lo veo en el juego", sino que lo necesario, lo posible o lo imposible están motivados por deducciones que proveen las "razones". En particular los imanes empiezan a servir como significantes generales constituyendo, por sus combinaciones, "modelos explicativos" aplicables a los tejidos, y permitiendo incluso como en el caso de *Xys* una construcción de todas las posibilidades.

4. Conclusiones

La evolución general que acabamos de esbozar en grandes líneas puede ser caracterizada por el pasaje progresivo de las coordinaciones de acciones materiales, cuyas significaciones no son extraídas (parcialmente) sino una vez que se han ejecutado los movimientos, a coordinaciones de inferencias cuyas significaciones se imponen desde sus anticipaciones. Esto no impide que ya en el nivel I sean formuladas algunas implicaciones generales que dirigen todas las acciones ulteriores. Por ejemplo, "el *B* pasa por debajo (de tal o cual línea de cadena) ya que se lo encuentra del otro lado" (*Ric*). En cuanto al detalle de las acciones que deben realizarse para reproducir las relaciones inherentes al tejido elegido, es notable que los sujetos más jóvenes tengan necesidad de

efectuarlas por movimientos de la mano y de los dedos, antes de desplazar las cintas mismas, según los trayectos descubiertos por la acción propia anterior.

Por supuesto, la evaluación general que acabamos de presentar comporta ciertas irregularidades, como a veces una facilidad en la manipulación correcta de los imanes mayor que una manipulación de los telares completos, pero en grandes líneas se verifica el pasaje progresivo de las coordinaciones de acciones a las composiciones inferenciales en el seno de las cuales son las abstracciones reflexivas las que dirigen las manipulaciones.

El interés específico de esta investigación es el de referirse a una estructura de conjunto compleja cuyos caracteres múltiples son solidarios y difíciles de discernir a primera vista. La investigación sobre los caminos presentada en el capítulo II (estructura de árbol) se refería también a un sistema de conjunto, pero fácil de discernir ya que todos los trayectos parciales reposaban sobre las mismas relaciones dicotómicas. En el caso que aquí nos ocupa, por el contrario, se trata de relaciones diversas (alternancias de los *B* o de los *N*, inversiones entre ambos, multiplicidad de los entrecruzamientos, correspondencia con los imanes, etc.) pero todas ligadas entre sí en una estructura de conjunto muy compleja que solamente se hace comprensible después de un meticuloso análisis. De aquí resulta que debemos distinguir dos tipos de implicaciones entre acciones o significaciones: las implicaciones que llamaremos "locales" se refieren a un tipo de relaciones (alternancia de los *B* o de los *N*, inversiones de los *B* y de los *N*, repetición de los entrecruzamientos, etc.) y las implicaciones que llamaremos "sistémicas" que consisten en vincular las relaciones locales en un todo coherente hasta proveer sus "razones". De este punto de vista resulta claro que la sucesión de nuestros tres niveles consiste en una construcción progresiva de esas implicaciones sistémicas ausentes en el nivel I, que comienzan en el nivel II (pero en el cual las "razones" solo consisten en invocar un "es siempre así en el juego") y que se imponen en el nivel III con comprensión de las "razones" intrínsecas al sistema.

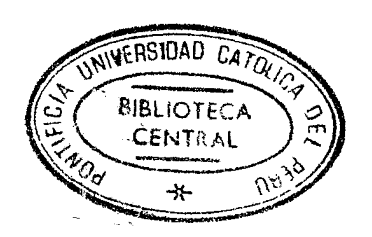
Resulta entonces evidente que hay implicaciones entre acciones desde el nivel I pero de tipo "local", y tales que la significación de estas acciones esté determinada por sus resultados verificados sobre los telares. Solo en raras excepciones la implicación es deducida sin control empírico; es sin embargo así cuando el sujeto declara (e incluso a veces con certeza) que si el *B* o el *N* permanecieran constantemente por encima y por debajo "se caerían" (*Ric*) y nada de eso ocurre en el caso de la alternancia encima-debajo. Por el contrario, el hecho de que esta alternancia puede continuarse sin cesar es a la vez una inferencia inductiva y un hecho observable.

En el nivel II comienzan las implicaciones sistémicas, en las com-

paraciones entre modelos, o los juicios sobre lo que es posible y lo que es imposible en los tejidos presentados. Pero como ya hemos dicho esas inferencias no bastan para poder llegar a "las razones" necesarias, ya que las únicas razones invocadas consisten en constatar que es "siempre" o "nunca" así en las relaciones comprobadas, lo que consiste en confundir la necesidad con la generalidad. Pero esta generalidad basta ya para mostrar que para el sujeto se trata de un "sistema" y no de una simple colección de regularidades locales.

Solamente en el nivel III las implicaciones sistémicas sobrepasan definitivamente, a tal punto que un sujeto (*Xys*) llega a deducir, a partir de un único par de imanes, el conjunto de todas las otras posibilidades, lo cual marca la victoria de lo "necesario" sobre lo "general".

Para terminar, señalemos que en todos los niveles, desde el primero, las relaciones establecidas por el sujeto son isomorfas a las futuras operaciones. La serie de las alternancias caracteriza así lo que llamamos "conjunciones obligadas", es decir aquellas cuyos términos son inseparables; en tanto que la serie de los hilos de cadena tiene que ver con las "conjunciones libres", en el sentido que nada obliga a poner el color púrpura al lado del amarillo, siendo necesarias únicamente las series *cfcfcf*. Las inversiones constituyen en cierto sentido negaciones. Las disyunciones exclusivas caracterizan las relaciones entre *N* y *B*, en tanto que se puede hablar de disyunción no exclusiva cuando *B* sobre *c* entraña o bien *N* sobre *f*, o bien *c* sobre *N*. Por otra parte, hay incompatibilidades o imposibilidades, etc.



VIII. Significación de agrupaciones o reuniones

con la colaboración de A. Henriques, D. Maurice y V. Jacq

Este capítulo consta de tres secciones cuyo punto en común es la referencia a construcciones o transformaciones de agrupaciones (o reuniones) relativas a estructuras o "agrupamientos" de seriaciones o de clasificaciones.

SECCION I
LAS MODIFICACIONES DE UNA SERIACION
con la colaboración de V. Jacq

La técnica de esta primera investigación es extremadamente simple: una vez construida una seriación con 9 clavos de alturas diferentes, dispuestos verticalmente, se pide que se designe y se describa el elemento "intermedio" (*M*), o sea el quinto. Luego se pregunta cómo hay que hacer para que ese "intermedio" se convierta en "el más grande" o para que se convierta en "el más pequeño" utilizando un reservorio de clavos.

1. Nivel I

Los sujetos de un nivel inicial IA encuentran diferentes soluciones:

XAV (4;5) toma uno de los clavos más pequeños para ponerlo en lugar del intermedio y declara que *"hay que estirarlo así"* mostrando cómo alargarlo por sus dos extremidades, lo que supone la no conservación de su longitud.

FRE (4;6) toma el más grande de los clavos y lo ubica en el medio, pero comprueba que esto destruye la seriación y se limita entonces a declarar "*no puedo*".

CAR (4;4) para que el intermedio se haga el mayor, la niña se contenta con decir que "*hay que cambiar*" su posición y lo pone encabezando la serie ante los más grandes; para hacer de él el más pequeño lo ubica en el otro extremo, al final de los más pequeños. "—¿Qué has hecho? —*Cambié de lugar*" como si, una vez que la seriación ha sido correctamente construida por el sujeto, con el lugar de los grandes, medianos, pequeños determinado por el tamaño de los elementos, esos lugares confirieran el tamaño a los elementos.

ERI (4;10) pone el mas grande en el lugar del mediano pero oblicuamente, vinculando a los otros que están ordenados en dos verticales ordenadas y dice: "*Comió y se hizo un poco más grande*".

AND (5;6) para que el intermedio *M* se haga el más grande, la niña lo pone en lugar del más grande y éste en el lugar del *M*. Hace lo mismo con el clavo más pequeño para que el *M* se haga el más pequeño de todos. Se mezclan luego los clavos pidiéndole que haga de un intermedio "el más grande"; lo pone al lado del pequeño lo que le confiere a sus ojos un tamaño diferente.

DAR (4;11) pone uno de los clavos más grandes sobre el intermedio para alargarlo, o uno de los pequeños sobre el mismo intermedio para que se empequeñezca.

JEN (6;6) ubica al clavo más grande sobre el *M* para agrandarlo, luego pone a *M* sobre el más pequeño de todos para empequeñecerlo, como si eso no lo agrandara también.

DAV (6;0) construye toda la serie en una gran vertical y pone al *M* en su cúspide. Para conseguir que el mismo *M* sea más pequeño, simplemente pone al más pequeño en el lugar de *M*. "¿Y para que sea mediano? —*Hay que dejarlo mediano, si no ya no será mediano*".

Ninguno de esos sujetos comprende la conducta tan simple que consiste en sacar los elementos más grandes que *M* para que éste se convierta en el más grande, o el retirar los términos más pequeños que *M* para que éste resulte el más pequeño de los restantes. En otros términos, estas reacciones no consisten en composiciones de relaciones sino que permanecen en lo que hemos llamado, en el capítulo precedente, "predicados asociados". El más frecuente de entre ellos solo consiste en "cambiar de lugar" como dice *Car*, poniendo a *M* a la cabeza o al final de la serie como si fuera el lugar ocupado el que determinara el tamaño y no la inversa. Para algunos, ese desplazamiento actúa materialmente sobre *M* que cambia entonces de tamaño real: "Comió y se hizo un poco más grande" dice *Eri*. Para otros es necesario por el contrario tirarlo por sus dos extremidades cuando se cambia la posición, de lo cual resulta también una ausencia de conservación (*Xav*). Para otros niños, la vecindad de *M* con los grandes o los pequeños basta para modificarlo (*And*) incluso si se lo ubica al lado de elementos seriados y no en el interior de la serie. *Eri* divide la serie en dos colum-

nas verticales y las vincula por un *M* oblicuo que entonces es considerado como el más largo de todos. Otros se contentan con alargar *M* poniendo por encima de él un elemento de entre los grandes (*Dar* y *Jen*).

A pesar de una seriación inicial correcta, no hay ninguna composición operatoria de las relaciones en juego, siendo éstas reemplazadas por esas semirrelaciones que consisten en "predicados asociados" fundados en la relación general "ir con".

En un nivel IB se encuentran conductas análogas, pero con correcciones que conducen finalmente a la solución consistente en disociar la seriación *1-9* en dos series tales que la primera que va de *1* a *5* tiene como elemento mayor a *M* (el elemento mediano) y la otra que va de *5* a *9* tiene a *M* como el menor elemento.

AVI (4;3) comienza en IA, luego construye una sucesión no seriada y pone en su centro a un *M* relativamente grande, al cual luego para hacerlo "el más pequeño", simplemente lo acuesta en posición horizontal, mientras que los otros elementos están verticales. Pero llega a la solución correcta seriando la totalidad y dividiéndola luego en dos series parciales *1-5* y *5-9* que reúne las dos condiciones.

KAT (6;0) actua al inicio por ensayo y error, pero cuando el experimentador separa el grupo *1-5* del grupo *5-9* comprende de inmediato que *M* se hace *"el más pequeño"* comparado con los grandes, y que *"es e más grande"* (de los *1-5*) pero *"es también el mediano"*.

ARC (6;4) sacrifica la seriacion para hacer a *M* más grande que los otros, y luego más pequeño que el resto. Después de lo cual encuentra la solución astuta de ordenar la totalidad de un techo (en forma de vivienda) cuya cúspide es *M*, lo que lo hace más grande que los elementos laterales conservando la posición de intermedio entre tres clavos a la derecha y tres a la izquierda, pero no encuentra ninguna solución para el más pequeño.

BID (7;11) saca de inmediato a los más grandes que *M*, convirtiéndolo así en el más grande, y luego hace lo mismo con los más pequeños: *"sacamos todo, solamente queda éste y es el más pequeño. No, queda solito* (ríe) *no va"*. Regresa entonces a una solución (de nivel IA) poniendo a *M* al lado del más pequeño de la serie; luego encuentra la solución correcta sacando de la seriación o bien los grandes, o bien los pequeños, lo que hace que *M* sea el más grande o el más pequeño de los restantes, pero expresa entonces ese resultado en términos de predicados asociados.

KAR (7;6) también comienza en IA, luego construye un techo (de forma ⋀) y lo analiza en términos de pares: *"Con éste se achicó y con aquel es el más grande"*.

Se vio así que el nivel IB es un nivel de transición entre los predicados asociados y las relaciones componibles, manifestándose entre otras cosas por la solución en forma de techo, la que sacrifica la seriación simple por una doble serie de elementos con vértices ascendentes y descendentes.

2. Nivel II

Desde los 7-8 años la solución se encuentra de inmediato por eliminación de los más grandes o de los más pequeños convirtiendo *M* en el más grande o el más pequeño aunque sigue siendo el intermedio de la serie completa.

SAC (7;10) declara al comienzo que la solución es *"imposible: de todas maneras quedará como es"*. Luego corta la serie en dos y muestra que *M* es el más grande de una de esas semiseries, el más pequeño de la otra y el intermedio de la totalidad.

CEL (8;6) *Solo tenemos que sacar aquéllos (1-4) y M se hace el más grande y será aquél* (el nuevo intermedio) *el nuevo mediano."*

NAT (8;1) *—Allá* (serie incial) *es el mediano; sacamos éstos* (los más grandes) *y es el más grande; y si sacamos éstos* (los más pequeños) *es el pequeño. —*¿Y si lo pongo al final (de la serie completa)? *—Es siempre el mediano"*.

FLO (8;10) para hacer de *M* el más grande, solo hay que sacar los más grandes y para hacer... hacerlo el más pequeño *"se hace al revés"*.

3. Conclusión

El interés de esta investigación consiste en poner en evidencia el papel de las significaciones de los predicados y de las composiciones mismas. En lo que respecta a los primeros se pueden distinguir tres tipos:

1) Los "predicados asociados" de manera indisociable, tales como el tamaño de un elemento y su lugar en la serie, como si modificando esta posición se modificara al mismo tiempo el tamaño del elemento (nivel IA).
2) Otra asociación más refinida consiste en creer que "poner juntos" un grande al lado del pequeño, o la inversa, modifica por contagio a esos elementos en vecindad.
3) Finalmente los predicados son relativizados, los términos "grande" y "pequeño" sólo tienen sentido por referencia a referenciales, lo que los hace esencialmente relativos: "grande" significa entonces "más grande que *x*" y lo mismo "pequeño". Esta evolución de la significación de los predicados es entonces indisociable de una transformación de los modos de coordinación procediendo de un simple arreglo figural a una composición de las relaciones como tales, que se afirma solo en el nivel del comienzo de las operaciones *concretas*, es decir en el nivel II. Dicho de otra manera a la evolución de las significaciones corresponde un desarrollo de las implicaciones entre acciones, uno de cuyos caracteres esenciales es el de no constituir "formas" puras sino estar en dependencia estrecha de sus contenidos.

SECCION II
SIGNIFICACIONES DE AGRUPACIONES O REUNIONES Y DE SUS RAZONES INTERNAS
con la colaboración de A. Henriques y D. Maurice

4. Clasificaciones con elementos variables

Hace ya tiempo hemos estudiado con B. Inhelder[1] la formación de clasificaciones, pero limitándonos a emplear la más simple de las técnicas: dar al niño un cierto número de objetos y pedirle que los acomode como se le ocurra, sin proceder a agregados o supresiones de elementos en el transcurso de la acción. En el caso presente, trataremos de extraer las significaciones y relaciones propias al detalle de las conductas, haciendo variar los contenidos de manera de poder analizar las reacciones a esas modificaciones sucesivas de los objetos para clasificar.

El material consiste en dos grandes velas blancas, tres velas medianas rojas, cinco velas pequeñas rayadas (azul y blanco) y siete velas redondas y amarillas.

Se efectúan entonces las manipulaciones siguientes, preguntando en cada caso al niño cómo hay que nombrar o caracterizar al conjunto presentado:

1a: se presenta al niño una caja en la cual se introduce, en su presencia, una gran vela blanca, luego se cierra la caja y se pregunta al niño qué es lo que hay que escribir en una etiqueta para saber el contenido de la caja.

1b: se abre la caja y se agrega una vela roja mediana. Se pregunta entonces al niño si es necesario hacer una nueva etiqueta; así siguiendo con cada modificación del contenido de la caja.

1c: se agrega una pequeña vela rayada azul y blanco.

1d: se agrega una vela redonda amarilla.

Luego se procede de la misma manera en orden decreciente.

1c: se retira una vela redonda amarilla;

1b: se retira una pequeña vela rayada azul y blanco;

1a: se retira una vela mediana.

(Se distinguen dos grupos de niños, uno que comienza por el orden creciente de las velas y el otro que comienza por el orden decreciente, para determinar si el modo de presentación juega un rol en la atribución de las significaciones.)

2a: se presentan dos grandes velas blancas en la caja y se pide el texto de una etiqueta.

[1] J. Piaget, B. Inhelder, *La genèse... op. cit.*

2b: se agregan dos velas medianas rojas.

2c: se agregan dos pequenas velas rayadas azules y blancas;

2d: se agregan dos velas redondas amarillas.

(Luego se procede como en la primera situación sacando cada vez dos velas siguiendo el orden inverso.)

3a: se presenta una gran vela blanca y se pide al niño el texto de una etiqueta.

3b: se agregan tres velas medianas rojas y se pide una etiqueta.

3c: se agregan 5 velas rayadas azules y blancas y se pide una etiqueta.

3d: se agregan 7 velas redondas y amarillas, y se pide una etiqueta.

(Luego se procede en el orden inverso sacando cada vez una categoría de velas como en las situaciones precedentes. En cada tipo de situación hay que distinguir dos grupos de niños, uno que comienza por el orden ascendente y el otro por el orden descendente.)

Observamos tres niveles. El primero (entre cuatro y seis años) está caracterizado por el empleo de predicados absolutos sin connotaciones relacionales. El segundo (entre 6 y 9 años) es el de la inserción en clases parciales que no están en tanto subclases en una clase englobante total; el tercero (entre 10 y 12 años) alcanza el status de "agrupamiento" jerárquico. Si esta solución solo se logra después de los 9 años es porque a cada agregado o supresión de elementos, tales agrupamientos con contenidos variables son más difíciles de elaborar que los agrupamientos con contenidos inmutables, o sea con subclases estables (como ocurre desde los 7 u 8 años con las técnicas habituales). El interés de la presente técnica consiste en multiplicar las significaciones y los vínculos inferenciales o implicaciones entre acciones.

Veamos ejemplos de nivel IA:

TIE (3:7) está de acuerdo que se trata de velas aunque las llama "lápices"; también está de acuerdo en que las velas redondas son también velas cuya mecha puede ser prendida: "—¿Qué son? —*Bolitas para prender* pero cuando se le pide que nombre al conjunto contenido en una caja se limita a una enumeración: "—*Un lápiz azul, no, uno blanco, uno rojo, un lápiz con líneas blancas* (= el mismo antes designado como azul). —¿Podrías decir una sola palabra para todo lo que hay en la caja? —*Sí, dos lápices blancos, dos rosados y dos chiquitos.* —¿Pero si se pone todo junto? —*Un árbol, se parece a un árbol.* —¿Podrías hacerme dos montones para poner lo que va bien junto en cada montón? —(hace dos montones idénticos por correspondencia término a término)".

MAR (4.1) procede también por enumeración de los contenidos, y para dos subclases (dos cajas) pone también dos conjuntos idénticos por correspondencia. —¿Puedes decirme en una sola palabra lo que hay en la caja? —*Rosas, azules, amarillas y blancas*".

En un nivel IB las reacciones son las mismas, salvo que un objeto puede presentar dos predicados conjuntos, que permanecen siendo absolutos.

SIN (5;2) "—¿Si tomo las dos juntas? *—Blancas y blancas.* —Y si no las veo, ¿cómo me las describes? *—Blancas, pero una es pequeña y una es grande".*

A partir de un nivel II hay un comienzo de formación de pequeñas clases disjuntas con relaciones entre los predicados. El tamaño da lugar a tres grados: grandes, medianos y pequeños. Por otra parte, un mismo objeto puede ser definido a veces en función de su color, a veces por su tamaño y a veces por su forma. En particular los "redondos" y los alargados constituyen dos clases pero sin términos genéricos para estos últimos:

TOI (5;5) nombra primero los conjuntos en función de la cantidad de elementos: *"Allí hay dos velas y allá una; allá hay cuatro y esto es todo"* etc., pero al considerar el tamaño distingue tres pequeñas clases seriables. "—¿Cómo las llamas? *—Una que es grande, tres son pequeñas y cinco todavía más pequeñas".* La división en dos montones da para uno *"los gordos, los medianos y los chicos"* y para el otro *"son todas las velas redondas"* sin que haya identidad o correspondencia término a término entre esos dos montones como en los niveles precedentes. El conjunto total da lugar a un comienzo de término genérico: *"Caja toda llena de velas"* pero basta con sacar una para provocar un retorno a la enumeración.

JOS (7;6) comienza por rotulamientos por enumeración de los contenidos "—¿Y con una sola palabra? *—Se puede marcar «velas».* ¿Y si haces dos montones? —(Sin dudar la niña pone en uno los redondos y en el otro el resto) *allá están los redondos y allá los largos".*

CAR (7;4) idénticos rotulamientos iniciales. Luego se le pide que construya series que vayan juntas, y construye 5 paquetes seriados por color y forma: 3 paquetes de redondos por colores y los otros por tamaños.

STE (8;0) ordena las subclases *"por colores".* "—¿Se puede hacer de otro modo? *—Sí, por tamaños.* —¿Y para todos? *—Las velas de todos los colores".*

Este nivel II se encuentra entonces a mitad de camino entre las clases disjuntas y las clases englobantes, las primeras de las cuales resultan las preferidas. Hay entonces relativización de los predicados, lo que desde el punto de vista de las implicaciones entre acciones comporta dos consecuencias. Por una parte, el registro de un predicado entraña una especie de "conjunción obligada" con aquellos de la misma naturaleza, pero al mismo tiempo la constatación de las diferencias conduce a una diferenciación de nuevas subclases. Toda la construcción de los "agrupamientos" operatorios consiste entonces en una síntesis equilibrada de las semejanzas y de las oposiciones, lo que comienza a hacerse desde el nivel II pero solo culmina en el nivel III. Veamos un ejemplo de este nivel:

FRA (11;11) parte de la clase más englobante y reúne de inmediato la totalidad proponiendo como rótulo el término genérico de *"velas diversas, porque ninguna tiene la misma forma; algunas tienen la misma forma pero son las más chicas y las más grandes... y otras de colores diferentes y* (al mismo tiempo) *no tienen el mismo tamaño. No es entonces muy preciso".* Luego de los agregados o supresiones: *"De todas maneras será la misma cosa que antes o bien algunas cosas diferentes"*, lo que lo conduce a proponer una serie de subclases posibles cuya reunión lleva a la denominación inicial de *"velas diversas"*.

Algunos sujetos, para unificar esta diversidad, se limitan a caracterizar las subclases por el número de sus elementos, pero esto es solo provisorio y luego razona como *Fra*.

Vemos entonces que con esta técnica el "agrupamiento" de las clasificaciones de contenidos variables solo se logra en el nivel III, en tanto que con un contenido estable ese agrupamiento se logra desde los 7, 8 años (nivel II).

SECCION III
TRANSFORMACIONES DE ESTRUCTURAS
con la colaboración de A. Henriques y D. Maurice

El problema que vamos a examinar ahora consiste en presentar al sujeto ciertos objetos vinculados en una estructura de conjunto y ver si con otro contenido el sujeto será capaz de reconstituir la misma estructura. Hemos visto antes que la estructura serial parece tan dominante que basta incluso para modificar los tamaños atribuidos a los elementos según el lugar que ocupan. Pero, con sorpresa veremos que la seriación misma no siempre es imitada o reconstituida cuando se presentan otros contenidos para ordenar. A fortiori resultará lo mismo con estructuras más complejas (imbricaciones, intersecciones, etc.) al utilizar contenidos tan variados como: 5 clavos, triángulos similares de superficies diferentes o pulseras (círculos de diámetros crecientes), tarjetas representando 1, 3, 5, 7 o 9 ratitas, 10 rectángulos de colores diferentes, cilindros de diámetros crecientes con alternancias de blancos, negros, etc. La técnica consiste en seriar los clavos delante del sujeto o en presentar otros contenidos estructurados y pedir que estructure de la misma manera contenidos diferentes.

5. Seriaciones

Encontramos tres niveles principales. Estos son ejemplos del primer nivel:

INA (4;6) con un modelo que consiste en 5 clavos bien seriados cree reconstituir correctamente la serie formando una simple línea sin ordenación: *1 5 4 2 3.* "—¿Es lo mismo? —*Sí.* —¿Estás seguro? —*Sí.*

—¿Cómo hacer para tener exactamente lo mismo? —Los da vuelta con la punta hacia abajo y la base hacia arriba pero en el mismo orden. —¿Puedes hacer lo mismo con las ratitas? —*Así* (un simple alineamiento sin tener en cuenta la cantidad) —¿Y con las pulseras? —(Alineamiento irregular)".

CAR (4;4) con el mismo modelo anterior da cuatro elementos (en lugar de 5) irregulares: "—¿Cómo los puse? —(Da el orden de los suyos). —¿Y así? —(Mismo orden pero en superposiciones verticales). —*No.* —¿Y con las pulseras? —(Alineamiento con errores). —¿Y con las ratitas? —(Hace *1 3 7 5*). —Hazlo otra vez —(Idéntico orden irregular)".

YOR (4;6) a partir del modelo de 4 triángulos seriados lo copia como gran triángulo conteniendo un círculo, el cual a su vez rodea a un triángulo pequeño. Con el modelo de 5 clavos seriados hace una reproducción con 4 triángulos en línea pero irregulares.

ERI (4;10) a partir del modelo de 5 clavos seriados: "—Elige una colección y haz lo mismo —(Coloca un tubo grande *A* y luego 4 clavos mal seriados, luego un tubo $B < A$, un tercero $C > B$ y uno grueso al final)". Se superponen las dos series (que él había mezclado) "—¿Puedes probar con las pulseras? —(Las encaja entre sí)".

FRE (4;6) a partir del modelo serie correcta de ratitas amarillas (*1 3 5 7 9*). "—¿Puedes hacer lo mismo con los triángulos verdes? —*No*. ¿—Y así? (modelo; seriación de los clavos) —*Sí*". Hace entonces una correspondencia término a término entre los elementos pero sin ordenación.

NIC (6;6) modelo: ratitas; copia con clavos construyendo una serie irregular. "—¿Qué hice yo? —*En línea.* —¿Qué más? —*Recta*".

Vemos así que lo que se retiene del modelo es solo la forma del conjunto: una sucesión lineal horizontal o a veces envolturas topológicas. Pero el detalle de las relaciones es dejado de lado o es erróneo, en particular cuando se trata del número de elementos o del orden de los emplazamientos.

El progreso que marca el nivel II es la utilización de las correspondencias término a término, de donde resulta éxito en la mayoría de los casos, particularmente cuando se trata de seriaciones en función del número de elementos. Veamos dos ejemplos:

SAC (7;0) está dominado por la biyección y no logra sus copias sino cuando los números coinciden. Cuatro ratitas amarillas comparadas con 5 grises no dan *"porque hay más aquí"* y 5 cuadrados con tres cilindros tampoco: *"No, no puedo"*.

RIH (7;6) de la misma manera, a pesar de lograrlo con números iguales no puede hacerlo cuando hay 5 contra 4: *"No, no se puede hacer nada"*.

En pocas palabras, si la correspondencia biunívoca juega un rol positivo en estos sujetos, obstaculiza por otra parte la abstracción de la relación dominante que es la ordenación posible cualquiera sean los contenidos y sus cantidades. Por el contrario, estos niños

tienen en cuenta factores tales como los colores y sus alternancias, etcétera.

En el nivel III el orden domina finalmente sobre los otros factores en juego:

> *DID* (7;11) es un caso intermediario entre los niveles II y III. Después de lograr éxito inmediato con 5 triángulos que corresponden a 5 anillos rojos y una clasificación de las colecciones por colores se detiene en la comparación entre 1 3 5 7 9 ratitas amarillas y 2 4 6 8 ratitas grises: *"No es lo mismo"*. De la misma manera entre 10 cuadrados y 5 clavos: *"—No es lo mismo porque hay solamente 5.* —¿Hay otra cosa que sea parecida? *—Sí, hay cada vez más ratitas y allá clavos cada vez más grandes"*.

En los casos francos de este nivel se asiste a una abstracción inmediata del orden:

> *VER* (7;7) hace corresponder 6 tubos con 8 círculos: *"—Los puse por orden de grosor* (cilindros) *y por orden de tamaño* (círculos)". Hace lo mismo con 9 clavos. En cuanto a los números desiguales, incluidos 4 y 9 no obstaculizan porque *"va todo el tiempo en números cada vez más grandes"*.
>
> *OVE* (8;3): *"También va del más pequeño al más grande"*, independientemente de las cantidades.
>
> *CAL* (8;11): *"Allá hay de más en más y allá también"*.

Estos sujetos extraen el orden de crecimiento aun considerando constantemente la exigencia de clasificar las colecciones por colores, lo cual no se le solicita.

6. Imbricaciones e intersecciones

Debemos examinar la reconstitución de los modelos de inclusiones y de intersecciones cuando se trata de imitar lo que el experimentador ha construido con otros objetos o de cubrir de manera correcta diagramas de Venn dibujados sin contenidos. En este último caso, que da lugar a una enseñanza escolar demasiado precoz, es interesante comprobar cómo esa enseñanza es mal comprendida por los sujetos más pequeños. En un nivel I para el modelo $(x\bar{y}) \vee (\bar{x}y)$ la parte común xy no tiene relación con las otras dos:

> *LAU* (6;4) pone en xy la *"familia de los papás"* (tres velas medianas rojas), y en $\bar{x}y$ la *"familia de las mamás"* sin ninguna relación con las otras.
>
> *CED* (6;4) pone en xy una vela azul, en xy velas rosadas y en $\bar{x}y$ una blanca. Cuando se le muestra que xy también forma parte de y pone velas rosadas en todas partes.
>
> *STE* (6;3) pone en $x\tilde{y}$ las medianas, en $\tilde{x}y$ redondas y rojas y en xy las

mismas que en xy (por lo tanto sin idea de partes comunes xy) *"porque las casas se meten unas dentro de otras"* (xy en y) sin ver la reciprocidad de xy en x.

THA (7;8) pone en $x\bar{y}$ blancas, en $\bar{x}y$ pequeñas y en xy *"las rojas porque es un color que no está en los otros"* como si $xy = \overline{xy}$ (incompatibilidad). Después de lo cual pasa a tres clases distintas para $x\bar{y}$, $\bar{x}y$ y xy.

LOR (8;0) pone en xy elementos que no pertenecen ni a x ni a y.

Se ve que en este nivel I la intersección no es comprendida en absoluto. *Ced* reparte los objetos en tres clases diferentes, y luego mete los mismos en las tres. *Ste* incluye xy en $\bar{x}y$. *Tha* precisa que en xy hay elementos que no pertenecen ni a $\bar{x}y$ ni a $x\bar{y}$, etc. En pocas palabras, la intersección no es aún en ningún caso, la parte más común entre x e y.

En el nivel II se observa una conducta intermediaria donde la intersección xy es ocupada por una adición de elementos algunos de los cuales corresponden a $x\bar{y}$ y otros a $\bar{x}y$, lo que no es la búsqueda de un predicado común sino la adición de dos "representantes". O bien sitúan en xy elementos con caracteres intermediarios entre los de x y los de y:

ANA (7;0) pone en $x\bar{y}$ velas rectas y en $\bar{x}y$ velas redondas; en xy ubica entonces una recta y una redonda: *"Una por esta familia ($x\bar{y}$) y otra por esta familia ($\bar{x}y$)"*.

YVE (10;11) pone en $x\bar{y}$ *"las velas grandes"*; en $\bar{x}y$ *"las chicas"* y en xy *"las medianas porque están entre las chicas y las grandes"*.

RIC (11;11) pone en $x\bar{y}$ y las amarillas, en $\bar{x}y$ las rojas y en xy *"las anaranjadas, porque rojo y amarillo hace anaranjado"*.

Finalmente, en el nivel III, la selección correcta es poco a poco descubierta o planteada de inmediato:

RIO (7;9): *"En $x\bar{y}$ velas rectas, en $\bar{x}y$ redondas anaranjadas y en xy una larga como en $x\bar{y}$ que es anaranjada como las redondas"*.

ICO (10;11): Pone en $x\bar{y}$ redondas y rojas, en $\bar{x}y$ largas y blancas, y en xy una larga roja.

GER (10;7) llega a una solución correcta por intersección entre 3 y no solamente entre dos subclases.

Se ve cómo a pesar de la enseñanza escolar la intersección no es comprendida tan rápido como se piensa, por falta de las implicaciones entre acciones que suponen la coordinación de clases.

7. Inclusiones

Hemos utilizado dos modelos diferentes para representar la inclu-

sión. Uno de ellos, que llamaremos la "partición" representa una totalidad por un círculo separado en dos partes (*A* y *A'*) por medio de una simple línea (recta o no); el otro modelo, llamado "envolvente" representa un gran círculo o elipse llamado "casa" en el interior del cual se encuentra un círculo pequeño del cual se dice que es una de las habitaciones de esa casa. Llamaremos *B* a la totalidad. El círculo pequeño será llamado *A* y la corona que lo rodea será *A'* de donde tenemos *A* + *A'* = *B*. El hecho interesante es que la comprensión de la inclusión es notablemente más fácil en el caso de la partición que en el de la casa porque en esta última situación el sujeto tiende a ver en *A* (círculo pequeño) y *A'* (corona que lo rodea) dos clases disjuntas en lugar de dos subsistemas complementarios en el seno de un mismo todo *B*.

Veamos ejemplos del nivel I, comenzando por la situación de la "casa":

> *CED* (6;4) pone en *A* una vela amarilla y en *A'* dos redondas: "—¿Y para toda la casa (insistiendo sobre el «toda»)? *—Estas dos velas* (muestra *A'*)".

> *ALA* (6;6) pone en *A* una vela larga y una redonda y en *A'* 3 ejemplares de cada una de las velas elegidas por *A*. "—¿Cuántas en la casa grande (se muestra el total). *—Tres redondas y tres rectas*" y no cuatro de cada una lo que caracteriza *A'* y no *B*.

> *ANA* (7;0) *—En el gran jardín (A') velas redondas. —En el jardín pequeño (A) velas rectas y gruesas*". Ninguna denominación para la totalidad.

> *DIA* (7;1) velas pequeñas rosadas y blancas en *A'*, velas pequeñas azules y blancas en *A* pero sin denominación para el conjunto.

> *CAR* (7;9) idénticas reacciones al comienzo, pero al no encontrar el nombre para la totalidad, cambia el contenido de *A* y pone en su lugar las mismas que en *A'*, de donde un todo donde, para el niño, *B* = *A'* y *B* = *A*. . .

Si llamamos inclusión a una reunión de subclases que presentan, por una parte, un predicado común y, por otra parte, predicados diferenciados para cada una de las subclases, entonces no hay inclusión. La mejor prueba es que si se pregunta por el número de elementos del todo *B* (= *A* + *A'*) dan el número de elementos de *A'* y no de *B*.

En el nivel II la totalidad está caracterizada por el conjunto de las *A* y de las *A'* pero por simple adición y no por síntesis o búsqueda de un predicado común:

> *DAV* (6;3) pone en *A* velas rosadas y en *A'* blancas. "—¿Y cómo se llama *toda* la casa? *—Es la casa de las rosadas y de las blancas*".

> *STE* (6;3) pone en *A* velas rectas medianas y en *A'* redondas, y para el todo *B* dice *"medianas y redondas"*.

Finalmente, en el nivel III, hay éxito inmediato:

TOP (9;8) pone en *A'* dos velas rectas, en *A* dos redondas, y para el todo dice *"el conjunto de las cuatro velas"*, denominando a *B* y no ya a *A'* ni tampoco una simple enumeración.

ENI (10;11) pone en *A* velas redondas amarillas, en *A'* redondas rojas, y para el todo *B* dice *"el conjunto de las amarillas, no* (ríe) *de las redondas"*.

En cuanto a la partición de los elementos en dos montones *A* y *A'* separados por una simple línea, la inclusión de *A* + *A'* en un solo todo *B* es mucho más fácil porque ya no hay confusión posible entre ese todo *B* = *A* + *A'* y la subclase *A'*, en tanto que en la prueba precedente la subclase *A'* rodea a *A*, lo que hace difícil la distinción entre el todo *B* y este anillo *A'*. Se encuentran entonces respuestas correctas desde el nivel I.

SIM (5;2) dice de inmediato que el todo *B* está formado por *"todos los blancos, pero éstos (A) son pequeños y aquéllos son grandes"*. Hay entonces un predicado común a *A* y a *A'* y dos predicados diferenciados para *A* y *A'*.

ANT (5;5) pone en *A* velas redondas marrones y en *A'* otras de otros colores, definiendo al todo *B* como *"un montón de velas mezcladas"*.

PAO (5;7) *A* está compuesto de redondas y *A'* de muchas *"largas de colores diferentes"*. El todo *B* es de nuevo un *"montón de velas mezcladas"*.

KAR (6;6) *"Todas son pequeñas* (*B*)*"* pero *"algunas* (*A*) *están paradas y las otras acostadas* (*A'*)*"*.

NAT (6;11) pone en *A* *"los redondos"* en *A'* *"los rectos"* y en *B* *"el montón de 16 velas* (= *A* + *A'*)*"*.

Resulta claro que cuando la inclusión es el resultado de operaciones o acciones de reunión efectuadas por el sujeto mismo no plantea problemas excepto en lo que se refiere a las cuantificaciones de *A*, *A'* y *B* que hemos estudiado hace tiempo (cuando las *A'* son mucho menos numerosas que las *A*).

En este caso hay cierto parentesco con la situación de los círculos imbricados estudiados en este capítulo donde la inclusión es relativa a una relación impuesta desde afuera.

SECCION IV
LAS ACTIVIDADES ESPONTANEAS DE LOS SUJETOS

Solo nos queda examinar los problemas por los que comenzaban nuestras interrogaciones: proveer al niño con un material tan heterogéneo como fuera posible y en un desorden completo, y pedirle

que lo ordenara como le pareciera, justificando sus acciones. De hecho, llegan finalmente a clasificar los objetos en función de sus semejanzas y a seriar los elementos de cada colección, lo que equivale a una síntesis de estos dos tipos de operaciones. Aunque esas conductas parezcan triviales nos ayudarán a comprender en función de cuáles significaciones e implicaciones entre acciones se constituyen, hasta imponerse como necesarias a los ojos del sujeto.

En el nivel I el sujeto construye objetos complejos o colecciones desordenadas. Los primeros están compuestos por partes heterogéneas aproximadas entre sí a las cuales se da posteriormente una significación; las segundas resultan de acciones sucesivas de juntar, sin anticipación.

YOL (4;5) toma un triángulo grande, inserta allí un clavo pequeño y luego un círculo pequeño que contiene a su vez a un triangulito. Ubica, sobre uno de los lados del triángulo grande, un pequeño cilindro que atraviesa ese lado, agrega a la totalidad dos pequeños anillos próximos de uno de los lados del triángulo grande pero exterior a éste. La totalidad no recibe ninguna denominación. Por el contrario un cartón rectangular es puesto al lado de un triángulo seguido de otro cartón, luego de dos anillos, en seguida un cilindro entre dos cartones. La totalidad es entonces un encadenamiento y no un conglomerado, y es bautizada como *"un elefante en un zoológico"*. Otro encadenamiento de 11 elementos es llamado *"un tren lleno de perros"*. Por otra parte los tres cilindros son encajados unos en otros pero con intervalos llenados por clavos. La última figura marca una tendencia hacia el ordenamiento: 5 elementos superiores son alineados pero no son contiguos (dos triángulos contienen cartones seguidos de tres cartones que contienen triángulos). Bajo esos 5 pares hay 5 largos clavos que los vinculan a 5 cartones alineados pero no seriados.

NIO (5;5) toma 9 triángulos de colores diferentes y los pone lado contra lado como un mosaico muy regular pero sin lagunas. Uno de esos triángulos es llamado *"un perro"*, otro *"el barco"* y el más grande *"un barco"*. En otras figuras los clavos son aproximados por los extremos, primero en una figura cerrada irregular con 6 lados diversamente orientados, luego en un arco de círculo, y finalmente en una serie casi recta. Los círculos encastrados es la única figura semiordenada.

LOS (6;6) da como dibujo final 6 parejas (2 triángulos, 2 anillos, 2 conjuntos de clavos orientados con las puntas a izquierda o derecha, 2 cartones y 2 cilindros a los que se agrega un tercero) simplemente aglomerados sin plan de conjunto pero bien apretados unos con otros.

Estas reacciones iniciales plantean un problema interesante de implicaciones o de semiimplicaciones entre acciones. Por una parte, una semejanza percibida entre dos elementos (por asimilación a un mismo esquema) implica (en el sentido de "conduce a" por implicación proactiva) una puesta en vecindad espacial, inicialmente local, en tanto simples parejas. Por otra parte, una vecindad aunque sea fortuita conduce a una significación común (el "elefante" y el "tren" de *Yol*) lo que lleva a una forma elemental de estructura que no es ni una seriación, ni una clasificación sino lo que llamaremos un "encadenamiento". Hay entonces desde este nivel I un comienzo

prometedor de estructuraciones que serán elaboradas en la medida en que las semiimplicaciones locales se coordinen en implicaciones sistemáticas.

Esto es lo que ocurrirá en el nivel II, en el cual el sujeto comienza por clasificar los elementos por formas y colores pero sin seriación interna de esas colecciones:

TIA (6;6) clasifica juntos los cartones amarillos, luego los triángulos verdes y rojos, las tarjetas con ratitas, luego las pulseras, pero no introduce la seriación sino en el caso de los anillos, ordenados del más grande al más pequeño, con alternancia de los colores.

MAR (6;4) "*—Clasifiqué las cosas que eran lo mismo.* —¿Cómo lo hiciste? *—Por el color; todos* (en un mismo grupo) *del mismo color*". Solamente hace una seriación de los clavos: "*¡Ah, por el tamaño!*"

DIA (7;11) idénticas clasificaciones, con seriación de los clavos. Sin embargo ya no resultan seriados sobre el diseño final, en donde están repartidos en dos conjuntos, uno bien seriado y el otro en desorden.

SAC (8;3) clasifica correctamente los subconjuntos y pone en seriación algunos, pero no todos, hasta el momento en que una intuición brusca le hace descubrir lo generalizable: "*Es también del más pequeño al más grande*". Ella aplica este principio hasta los cartones con elementos cuantificables, pasando así al nivel III.

Veamos finalmente el caso del nivel III comenzando por un intermediario que combina las seriaciones y las clasificaciones para todas las colecciones excepto los triángulos:

NAT (8;1) comienza por aproximar entre sí los triángulos en una figura sin forma como en nivel I, luego hace buenas clasificaciones para todos los otros elementos con seriación inmediata dentro de cada colección. En ese momento se le dan los triángulos y los aproxima entre sí en un todo sin significación. Los clavos resultan bien seriados pero también los reúne en una especie de flor cuyos pétalos están seriados del más pequeño al más grande partiendo del mismo centro.

CHA (7;10) *Rin* (7;7) y *Sac* (7;10) clasifican la totalidad en pequeñas colecciones por formas y colores, cada una de las cuales da lugar a una seriación inmediata y correcta, sin omitir ningún elemento del conjunto múltiple del material.

Hay pues en este nivel III síntesis de las semejanzas y de las diferencias, lo que nos conduce a discutir las ideas generales propias a este capítulo.

Conclusiones

Este capítulo algo heterogéneo intenta extraer las formas más elementales de las implicaciones entre acciones y las significaciones que están vinculadas a ellas. De hecho, se refieren todas a las

vinculaciones de semejanzas y de diferencias en situaciones variadas.

A este respecto, la implicación entre acciones (puestas en conexión) que parece más elemental, y por lo tanto la más general, parece reducirse a una pura tautología: "una mayor semejanza" implica "una menor diferencia" y "una mayor diferencia" implica "una menor semejanza". Pero esas evidencias son tan poco evidentes y por lo tanto tan poco tautológicas en los sujetos pequeños que, como E. Martí lo ha mostrado [2] las relaciones "más diferente" y "menos semejante" no son para nada sinónimas entre 4 y 5 años y son distinguidas sistemáticamente. Notemos además que en numerosas situaciones las relaciones de semejanza se traducen espacialmente por vecindades y las relaciones de diferencia por separaciones, y esto hasta el punto que en algunos casos la vecindad crea o aumenta la semejanza (como ocurre con algunos sujetos de la sección I en quienes el término mediano de una seriación cambia de talla si se lo ubica cerca de los grandes o de los elementos pequeños).

La ley general que parece extraerse de nuestras 4 secciones es la ausencia inicial de clases englobantes y el pasaje progresivo de los "predicados asociados" y de los simples encadenamientos a imbricaciones cada vez más amplias y mejor jerarquizadas. En otros términos, luego de centraciones alternadas y locales sobre semejanzas o diferencias, el progreso consiste en todas las situaciones en una síntesis de esos dos tipos de relaciones y esta síntesis exige la formación de sistemas de conjunto. El más simple de estos es la seriación, que consiste en una equivalencia de diferencias sucesivas (entre un elemento y su sucesor). En cuanto a las clasificaciones, éstas comportan recíprocamente una diferencia de equivalencias: estas últimas vinculan las subclases imbricadas del mismo nivel, en tanto que las diferencias son las relaciones entre las clases imbricantes en función de su orden jerárquico (las menos numerosas son las más englobantes). Ambos sistemas (seriación y clasificación) exigen cada uno por su lado, una síntesis de semejanzas y diferencias pero con reciprocidad en sus estructuras. No hay entonces razón para sorprenderse si esas síntesis son tardías, ni si se las encuentra con dificultades análogas en cada una de las 4 secciones de este capítulo.

En cuanto a los instrumentos de esta síntesis, se trata por supuesto de implicaciones entre acciones, que reemplazan poco a poco a los "predicados asociados" iniciales. Por ejemplo 1) la afirmación de una clase implica reunión de semejantes en un todo *A*,

[2] E. Martí, "La négation de la ressemblance chez l'enfant: différence ou altérité?" *Archives de Psychologie*, 1981, *188*, 25-45.

pero, por otra parte, 2) la reunión implica oposiciones o diferenciaciones (por ejemplo *A* se opone a *A'*); 3) la reunión de clases opuestas engendra una clase de rango superior: *(A . A') → B*; 4) de donde *B* → (*A* V *A'*); 5) la seriación implica iteración de diferencias de los mismos valores o de valores crecientes de la misma naturaleza; 6) la relación implica equivalencias y diferencias conjuntas entre *n* objetos; 7) las diferencias implican equivalencias parciales. Ejemplo: dos objetos diferentes en todos sus predicados son aún dos objetos; 8) las semejanzas implican diversos grados crecientes hasta un límite que es la identidad pura.

Esas implicaciones no son simples definiciones disfrazadas sino conexiones entre acciones materiales o mentales del sujeto, acciones y conexiones provistas de significaciones cuyas relaciones constituyen las implicaciones en juego (entre otras e independientemente de los aspectos causales) propias a las acciones materiales.

IX. Clasificaciones y simetrías

con la colaboración de C. S. Dionnet, J. Guyon y A. Sinclair

En el capítulo precedente tratamos de caracterizar a las seriaciones y clasificaciones en términos de relaciones recíprocas entre las semejanzas y las diferencias. Además de estos dos tipos de agrupamientos existe una preoperación bastante frecuente a cualquier edad y que se combina a menudo con las de las estructuras precedentes, pero no basta para engendrarlas: la construcción de las simetrías. Estas consisten, a partir de un orden cualquiera (de semejanzas o diferencias) en reencontrar su correspondiente por retorno o inversión en función de un eje que los separa.

Para analizar esas simetrías no hemos utilizado situaciones que las exigen, sino que nos hemos contentado con dos clasificaciones para ver cuándo y cómo el sujeto recurre a simetrías que no tienen nada de obligatorio. El material consiste en 52 pequeños cartones cuadrados que solo difieren entre sí por dos tamaños ("grandes" y "pequeños") y por dos colores (azules y rosas).

En lo que sigue, R = rosado grande, B = azul grande, r = rosado pequeño, b = azul pequeño. El experimentador pone en desorden una colección de seis elementos (colección I). Esas colecciones eran $3R + 3b$ (o $3B + 3r$); $5B + 1r$ (o bien $5R + 1b$); $5B + 1b$ (o bien $5r + 1R$), y ocasionalmente $1B + 3r + 2r$. El niño tenía que constituir otra colección con el mismo número de elementos (colección II) "para que vayan bien juntos", tanto los de la colección II como los de la I entre sí. Luego podía efectuar intercambios entre I y II, entre I o II y el conjunto de los restantes, siempre con la misma consigna que "vaya bien junto". Pueden ser establecidas dos tipos de simetrías, las unas "internas" entre las partes (o subcolecciones) del todo construido por el sujeto en II, las otras "externas" entre I y II. Un ejemplo de las primeras sería el siguiente: $3B$ frente a $3R$; un ejemplo de las segundas sería: si hay en I $3B + 3R$, poner en II $3b + 3r$.

1. Reacciones preoperatorias

Puesto que solo se trata de construir o corregir la colección II y ponerla en relación con una colección I sobre el mismo modelo, solamente distinguiremos dos niveles relativos a lo que "va bien junto" en el interior de I y de II y en sus relaciones principales en caso de intercambio entre los dos.

NIA (4;11) piensa que 3*R* no van bien con 3*b* y que habría que reemplazarlos por 3*r* *"porque ya hay grandes"*. Luego sigue fiel al color, pero para 5*B* y 1*r* en I tanto como en II, quiere corregir esta situación por un cambio y pasa 1*r* de I hacia II y otro *r* de II hacia I, sin prever que eso no cambiará nada.

VER (4;10) idénticas reacciones iniciales, pero para los cambios intercambia uno a uno los elementos de I contra los de II. "—¿Cuándo hay que parar? —*Cuando se cambiaron todos*", lo que por supuesto no cambia nada en lo que respecta a las relaciones. Después de lo cual la niña hace la inversa, de lo que resulta un retorno integral a su colección inicial.

LYM (4;5) de la misma manera cambia un *B* contra otro *B* sin ver que eso no cambia nada en ninguna de las dos colecciones.

ITA (5;10) con respecto a los elementos 3*B* + 3*r* de la colección II dice que no van *"bien juntos porque no son del mismo color"* y pone en la misma colección II 3*R* + 3*r*. Para 3*B* + 1*r* reproduce los mismos en la colección II, luego cambia el *r* de I contra el *r* de II. En lo que sigue permanece fiel a un criterio de color pero agrega más tarde el tamaño: 3*R* + 3*r* *"no va bien porque es el mismo color pero esto* (3*r*) *es más pequeño"*.

KAT (5;10) piensa que 3*R* y 3*b* van *"bien, porque es todo el mismo tamaño"*. —¿Y será aquello? —*Más pequeño pero es otro cuadrado* (por lo tanto tamaño sería = forma). —¿De veras van bien juntos? —*No, porque estos 3* (3*b*) *no van bien"*. Para 3*B* + 3*r* propone 3*R* + 3*b*, o sea la inversión de los tamaños: *"Tú tienes que darme el rosa y yo te doy el azul"*. Llega entonces a 5*B* + 1*R* contra 5*r* + 1*b*. *"—Todavía hay algo que no funciona"*, pero rehace las mismas series. Luego, para 3*R* + 3*b* forma la serie 3*B* + 2*b* + 1*r*: "—¿Así está bien? —*Sí, tú tienes 3 pequeños y 3 grandes y yo tengo 3 grandes y 3 pequeños"*. Finalmente viene la simetría: 1*R* + 8*r*; y también 5*R* + 1*b* para 5*B* + 1*r* y 4*R* + 3*b* contra 4*B* + 3*r*.

SAR (5;6) la serie incial 3*R* + 3*b* da lugar en la colección II a 3*B* + 3*r* pero agrega: *"—No se podría* (= no se debería) *poner los pequeños con los grandes"*, y pone en línea 3*R* + 3*B* contra 3*b* + 3*r*. Luego construye 5*R* + 1*r* contra 5*r* + 1*R* y luego cambia espontáneamente al *r* de la colección I contra el *R* de la colección II. Para 5*B* + 1*R* propone 1*b* + 6*r*: *"Allá los pequeños y todos los grandes aquí"* sin tener en cuenta los colores ni la cantidad.

BRI (5;6) para 3*B* + 3*b* da 3*B* + 3*r*; luego para 3*R* + 1*B* + 2*R* da 3*B* + 1*R* + 2*B*, invirtiendo los colores y diciendo: *"Va bien, todos son grandes"*. Pero para 3*R* + 1*r* + 2*R* invierte así: 3*r* + 1*R* + 2*r*, ocupándose de los tamaños pero admitiendo el intercambio de los medianos. De la misma manera 5*B* + 1*r* corresponde para él a 1*R* + 6*r*.

JOV (5;3) cuando en la colección I hay 5*b* + 1*r* él propone 1*b* + 5*r*, cuando en la colección I hay 5*R* + 1*r*, construye 5*r* + 1*R*.

SER (6;2) para la serie 5*R* + 1*r* construye 1*R* + 5*r*: "—¿Va bien? —*No, aquí hay 5 y aquí hay 1*. —¿Qué hay que hacer? —(Hace 3*R* + 3*r* de cada lado). —*Cada uno 3 grandes y cada uno 3 pequeños*", o sea correspondencias simples sin inversión. Para 3*R* + 3*B* da 6*b* pero "*no está bien; hay grandes azules y grandes rosados*. —¿No se puede? —*No, no se puede: hay rosados grandes y grandes azules*". No lo logra modificar; sólo propone 5*B* en II y 6*b* + 1*B* en I: "*Así puede ir; todos los pequeños azules con uno grande y aquí solamente rosados grandes*".

DOZ (6;5) comienza proponiendo 3*b* + 3*r* contra 3*R* + 3*B* invirtiendo los tamaños y los colores, luego da 6*b* contra 3*R* + 3*B*. "—¿Los dos son iguales? —*Sí*. —¿Y va bien? —*Sí*. —¿Por qué? —. . .". Para 5*r* + 1*R* propone 5*R* + 1*b* para conformarse a la heterogeneidad de II, luego intercambia uno a uno hasta tener 6*R* en II y 6 pequeños en I pero conservando 1*b* entre los *r*. Por otra parte, este niño, cuando hace agregados no se ocupa del número de elementos en juego en las colecciones y puede poner 7 u 8 en una de ellas sin correspondencia con los 6 que hay en la otra (de la misma manera que los sujetos *Sar* y *Sev*).

Cuatro caracteres notables deben ser señalados en las reacciones iniciales. El primero es que el hecho de "ir bien juntos" solo concierne a una de las dos colecciones I o II, y no a las relaciones entre I y II, salvo en casos de puestas en correspondencia término a término (por similitud de los elementos), cuando ello es posible (por ejemplo 3*R* + 3*r* de cada lado en el caso del sujeto *Ser*). El segundo es la dificultad para considerar los dos predicados "color" y "tamaño" a la vez, o bien porque uno solo está en juego (como el tamaño en el sujeto *Sar*), o bien porque al pasar al segundo predicado el sujeto olvida o deja de lado el anterior. El tercero es que los intercambios entre elementos de I y los de II solo intervienen en general por sugestión, y son tan mal comprendidos al comienzo que el sujeto no ve que al cambiar un mismo elemento no cambia nada (*r* intercambiado contra otro *r* en el caso de *Nic*, o bien *B* contra otro *B* en el caso de *Lym*). El sujeto *Ver* llega inclusive a cambiar todo y a continuar en sentido inverso como si eso cambiara algo. Finalmente, el cuarto carácter que hay que anotar en estas reacciones es que, el sujeto se centra en los criterios de color o de tamaño, dejando de lado frecuentemente la igualdad numérica obligada entre las colecciones I y II, como por ejemplo 6 en una y 7 u 8 en la otra en lugar de 6.

2. Reacciones operatorias

Veamos ahora ejemplos de sujetos de 7-8 años y más (nivel de las operaciones concretas).

TAN (7;2) "—¿Los tuyos van todos bien juntos? —*¿Con los suyos?* (piensa de inmediato en las relaciones entre las dos colecciones I y II después de haber puesto 3*b* + 3*r* enfrentados con 3*R* + 3*B*). *Pueden ir*

así (II) *o así* (I). —¿Pero (los dos) juntos? —*No* (pero) *se pueden poner los grandes azules con los chicos azules* (por intercambio) *luego los grandes rosados con los pequeños rosados* (colores). —¿Y de otro modo? —*Sí, allá* (II) *todos los chicos y allá* (I) *todos los grandes*". Hace lo mismo para todas las situaciones.

ANI (7;6) comienza de inmediato por las relaciones entre I y II: "*Yo tengo los azules grandes y los rosados chicos y tú tienes los rosados grandes y los azules chicos*". Realiza intercambios espontáneos en cada situación y dice: "*No tienes que darme tareas tan fáciles como ésta*". Pero para la situación con 5*R* + 1*r* y 4*R* + 1*b* + 1*B* en II, reconoce que "*así no va*". No puede considerar ningún intercambio que conduzca a un criterio único para todos los elementos de cada colección.

SEV (8;4) en la situación 3*R* + 3*r* en I dice que "*no va bien junto porque hace falta que todos sean chicos o todos grandes*" pero piensa que sí funciona si se los separa en 2 subclases. Para 3*b* + 3*r* y 3*R* + 3*b* basta con cambiar los 3*R* de II contra los 3*b* de I. En el caso de 1*B* + 5*b* contra 5*R* + 1*r* se podría modificar por intercambios las relaciones entre I y II, clasificándolos por tamaños.

STO (8;4) en el caso de 5*R* + 1*r* contra 4*r* + 1*b* + 1*R* ningún intercambio es satisfactorio salvo si se considera a uno grande como equivalente a 2 o 3 pequeños.

SCA (8;10) para los mismos puntos de partida dice que al cambiar los 4*r* de II contra los *R* de I "*son siempre los mismos* (colores), *entonces no está bien*".

NIN (10;11) es el primero que hace intervenir explícitamente la cantidad (6 contra 6) en las condiciones de homogeneización de las dos colecciones I y II. En la misma situación de los dos sujetos precedentes enumera los diversos intercambios posibles declarando que ninguno es satisfactorio, luego muestra lo que podría ser aceptable si se agregara un elemento en la colección II: "*Se podría* (entonces) *intercambiar como se quiera*", pero "*no estaría bien porque yo tendría más*". De la misma manera, en otra situación, esta niña sugiere agregados que hacen posible los reemplazos, y luego agrega: "*ah no, no se puede porque no habría la misma cantidad* (de elementos en I y en II)".

ROB (11;0) enumera los diversos reemplazos de colores y tamaños para ser comparables las colecciones I y II, y agrega como tercer factor el número de elementos: "*Podría ser porque hay la misma cantidad aquí que allá*".

El progreso de esas reacciones con respecto a las de 4-6 años es evidente. En primer lugar, esos sujetos comprenden de inmediato que "ir bien juntos" no concierne solamente al interior de la colección I y II, sino también sus relaciones (véase *Tan*, desde sus primeras intervenciones). En segundo lugar, consideran de inmediato y simultáneamente los dos criterios de semejanza y de diferencia: el tamaño y el color. En tercer lugar, agregan (implícitamente y luego explícitamente como lo hace *Nin*) la condición de igualdad numérica (6 elementos para cada colección), contrariamente a muchos de los sujetos de 5-6 años. En cuarto lugar, cada uno anticipa una multiplicidad de intercambios posibles que no hemos enu-

merado por razones de brevedad previendo para cada uno sus ventajas y sus inconvenientes. Finalmente, subdividen las colecciones en subcolecciones según las reglas de la clasificación, que se han hecho habituales en el nivel operatorio.

En pocas palabras, a pesar del carácter elemental de las pruebas utilizadas en este capítulo y que, a primera vista, pareciera que no pudieran dar lugar al establecimiento de ninguna sucesión por niveles de edad, se constatan sin embargo diferencias notables entre las reacciones preoperatorias y el comportamiento de los sujetos que han llegado al nivel de las operaciones concretas.

3. Conclusión: las simetrías

Por banales que sean estos hechos, nos muestran que antes de la edad en que se constituyan las seriaciones y las clasificaciones operatorias, interviene ya una especie de preoperación muy general que es la constitución o la búsqueda de simetrías, en el sentido más amplio del término. A nivel de los 4-6, una vez comprendido (contrariamente a *Nia*, *Ver*, *Lyn* e *Ita*) que los intercambios o agregados modifican las colecciones I y II, los sujetos construyen tipos de simetría. Por ejemplo, *Kat* se satisface con que "tú tienes 3 pequeños y 3 grandes y yo tengo 3 grandes y 3 pequeños" (independientemente de los colores), luego $1R + 8b$ para $1B + 8r$ o $5R + 1b$ para $5B + 1r$, etc. Ocurre lo mismo en *Sal*, *Bri*, etc. No se puede negar que son tipos de simetría, y es conveniente entonces dar a esta noción un sentido muy general que no implica forzosamente la solución alrededor de un eje sino simplemente relaciones de posición.

Recordemos primero lo que hemos admitido como conclusión del capítulo precedente: que las seriaciones consisten en semejanzas entre diferencias (por ejemplo, entre relaciones $<$ o $>$) y las clasificaciones en diferencias entre semejanzas (por ejemplo la similitud de predicados en el interior de una clase A imbricada en una clase B, cuyos predicados internos son más pobres que en A, pero siguen siendo comunes a todos los elementos de B). Estas características son independientes de las posiciones: ciertamente se pueden ordenar los términos de una seriación en una serie espacial $a < b < c$, etc., pero esas relaciones siguen siendo las mismas si a, b, c, están separadas en el espacio y se las compara por intermedio de medidas. En pocas palabras, las semejanzas y diferencias en juego en las clasificaciones y seriaciones solo conciernen a sus contenidos independientemente de las posiciones. Podemos entonces definir la simetría como una correspondencia invertida lo que equivale a decir una semejanza de los contenidos con inversión de las posiciones.

Desde el punto de vista de la lógica de las significaciones estas definiciones muestran que sus fuentes se remontan hasta los víncu-

los más generales, haciendo intervenir solamente las relaciones de semejanzas y diferencias entre contenidos, por una parte, y entre contenidos y posiciones por otra. En otras palabras, mucho antes que se construyan las estructuras, sus conexiones internas son preparadas por esas relaciones más elementales que luego se tratarán de "agrupar". El interés de las simetrías consiste en que parecen más precoces que las relaciones que preparan las futuras clasificaciones y seriaciones, y la razón de esto reside sin duda en que las simetrías están facilitadas por su carácter parcialmente espacial (rol de las posiciones). En cuanto a la definición propuesta de correspondencia invertida, no se trata naturalmente aún de la reversibilidad operatoria, sino de la invertibilidad.

Conclusiones de la primera parte[1]

1. Los hechos reunidos en esta obra describen las formas genéticas elementales que conducen a la formación de las operaciones y de las estructuras que resultan de sus composiciones necesarias. Tal como lo hemos comprobado en cada capítulo, esas raíces genéticas consisten constantemente en significaciones y en implicaciones entre ellas, a partir de las implicaciones entre acciones, que permanecen inicialmente implícitas antes de su toma de conciencia y de su formulación final en enunciados.

Como conclusión, solo nos resta clasificar las diversas variedades observadas de significaciones y de implicaciones entre significaciones. Comenzando por las más simples, es necesario partir de la significación de los predicados: se los puede definir como el conjunto de las semejanzas y diferencias entre una propiedad observada sobre un objeto y los otros predicados simultáneamente registrados o ya conocidos.

Los predicados están pues, vinculados entre sí por las preoperaciones de "conjunciones" que pueden ser "obligadas" (es decir, necesarias, con implicación mutua, como entre la presencia de una forma y de un tamaño) o bien "libres" (es decir, contingentes, como entre una forma y un color).[2] Pero entre esas dos formas de conjunción hemos observado en los sujetos más pequeños lo que hemos llamado "predicados asociados" (capítulo IV), vinculados por relaciones de conjunciones "seudoobligadas" (como si el tamaño del elemento mediano en una serie se modificara al cambiar su posición).

Un objeto consiste en un conjunto de predicados conjuntados y su significación equivale a "lo que se puede hacer con él" o sea a

[1] Estas conclusiones fueron redactadas en forma provisoria por J. Piaget (R.G., B.I.)

[2] H. Wermus, "Essai de représentation de certaines activités congnitives à l'aide de prédicats avec composantes contextuelles", *Archives de Psychologie*, 1976, *44*, 205-221.

la asimilación a un esquema de acción (ya se trate de una acción material o mental).

En cuanto a las acciones mismas, su significación se define por "aquello a lo que se llega a través de ellas" en función de las transformaciones que producen en los objetos o las situaciones a las que se refieren. Ya se trate de predicados, de objetos o de acciones, todas sus significaciones implican actividades del sujeto, en interacción con realidades exteriores o físicas, o bien realidades engendradas anteriormente por el sujeto mismo como las entidades lógico-matemáticas.

Por otra parte, se pueden distinguir grados en esas significaciones, según que permanezcan "locales" en tanto relativas a datos limitados y a contextos particulares, o se conviertan en "sistémicas", en tanto preparatorias de la construcción de estructuras, o finalmente "estructurales" en tanto se refieran a las composiciones internas de estructuras ya constituidas.

En lo relativo a la significación de las significaciones, diremos que ellas son los únicos instrumentos de la comprensión, por oposición a las simples constataciones que, antes de ser revestidas de significaciones, no proveen sino extensiones, sin inteligibilidad por sí mismas. No hay entonces necesidad de retener como esencial la oposición que establecía Frege entre *Sinn* (el sentido) y *Bedeutung* (la connotación), estando ésta determinada por aquélla; y las "tablas de verdad" puramente extensionales deben ser reemplazadas por extensiones variables subordinadas a las significaciones.

2. Veamos ahora lo que el estudio de las significaciones nos ha enseñado en lo relativo a las implicaciones. Estos dos problemas están vinculados de manera indisociable, ya que si bien toda verdad reposa sobre significaciones, y que éstas consisten, bajo todas sus formas, en atribuciones de esquemas a los predicados, objetos o acciones, va de suyo que no podrían existir esquemas o significaciones aisladas y que intervienen siempre múltiples vínculos entre ellas. Esto equivale a decir que en todos los niveles, por bajos que sean, todo conocimiento comporta una dimensión inferencial, por más implícita o elemental que ella sea. En otros términos, el empleo de cualquier significación supone y entraña el de ciertas implicaciones cuya naturaleza y variedades conviene recordar ahora.

Inicialmente hemos sido conducidos a reemplazar la implicación extensional clásica $p \supset q = (p \cdot q \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q})$ en donde $\bar{p}$ en $\bar{p} \cdot q$ es todo lo que no es p (y no el complementario de p con respecto a q) por lo que hemos llamado la "implicación significante" $A \rightarrow B$ si al menos una significación de B está englobada (= inherencia) en la de A, y si esta significación es transitiva (= la de C englobada en la de B, luego la de D en las de C, B, A, etc.).

La consecuencia de esta definición de la implicación significante es que, ya que toda acción comporta una significación además de su aspecto causal (= efectuación material), deben existir implica-

ciones entre acciones, es decir entre sus significaciones. Esto es un hecho fundamental, que sobrepasa en mucho al conjunto de las implicaciones entre enunciados y que interviene desde el comienzo en lo que hemos llamado la lógica de las acciones en tanto substrato indispensable a la lógica operatoria.

Antes de mostrar sus relaciones, señalemos de inmediato que esas implicaciones entre acciones, así como entre enunciados, pueden presentarse bajo tres formas: 1) una forma "proactiva" (que Peirce llamaba "predictiva") que consiste en decir si $A \rightarrow B$, los B consisten en consecuencias nuevas derivadas de A; 2) una forma retroactiva (que Peirce llamaba "retrodictiva") expresando el hecho que B implica A en calidad de condición previa; 3) una forma justificativa si vincula a 1) y 2) por conexiones necesarias que alcanzan así las "razones". Pero debe recordarse que la razón R de una verdad necesaria no es nunca aislable y plantea tarde o temprano el problema de la razón R' de esta razón R y así siguiendo en una espiral dialéctica que se agrega a las interconexiones entre las implicaciones de tipo 1) y 2). Esta espiral es debido al hecho que la realidad retrocede a medida que el sujeto se aproxima a ella, porque se plantean nuevos problemas a medida que la realidad es mejor conocida.

3. Lo propio de estas diversas relaciones iniciales que acabamos de recordar es que cada una por su lado y entre sí constituyen fragmentos de estructuras, que se coordinan progresivamente hasta la constitución de los "agrupamientos" a partir de los 7-8 años. Pero el interés de esos esbozos de estructuraciones, debidas a las interacciones entre significaciones, consiste en que prepara la formación, no solamente de los agrupamientos del nivel de las operaciones concretas, sino también de las 16 operaciones más complejas que corresponden a las 16 posiciones de las tablas de verdad, interpretadas en términos de significaciones y no bajo su forma puramente extensional. Así, hemos asistido a la formación precoz de intersecciones, incompatibilidades, etc., pero en el plano de las acciones y no de los enunciados, lo que muestra una vez más el rol formador general de la lógica de las acciones y de las implicaciones entre acciones, fuente de las implicaciones significantes por oposición a las implicaciones extensionales.

Pero, tal como lo hemos dicho, si se quiere constituir una lógica de las significaciones es conveniente distinguir diferentes formas de conectivos "y" y "o" así como de negaciones, de tal modo que se llega a más operaciones que las 16 operaciones de la lógica extensional. Las conjunciones "y" pueden ser "obligadas" y entonces $p \,.\, q$ se convierte en $p \Leftrightarrow q$, o bien "libres" con $p \,.\, q$ sin relaciones necesarias, de donde resultan también dos tipos de "o" y de intersecciones. Las negaciones son siempre relativas a los referenciales y pueden entonces ser "proximales" ($A = B - A'$ si el referencial es B) o bien "distales" en grados diversos, etc.

Segunda parte

Rolando García

X. Lógica y espistemología genética

1. Orígenes epistemológicos del enfoque piagetiano de la lógica

Piaget es ante todo un epistemólogo. Su preocupación epistemológica surgió de la biología, lo cual no significa, sin embargo, que ella tiene una orientación estrictamente biológica. Es frecuente leer o escuchar que, "en realidad", Piaget redujo el conocimiento a un proceso biológico, o bien que él intentó explicar el sistema cognoscitivo a través de la biología o, más aun, que él utilizó la teoría biológica para explicar la fundamentación de la lógica y la matemática. Todo el trabajo de Piaget sobre las relaciones entre las ciencias tiene una tonalidad tan fuertemente antirreduccionista que uno se pregunta cómo es posible mantener seriamente tal interpretación. Consideramos que se trata de una representación ilegítima de la teoría epistemológica piagetiana, y que es relativamente fácil poner de manifiesto cuáles han sido las fuentes de donde ella surgió. Retomaremos tres aserciones de la teoría que podrían estar en el origen de esta interpretación deformante. La epistemología genética sostiene las tesis siguientes:

a) hay una continuidad entre los procesos puramente biológicos en el niño recién nacido y el tipo de acciones organizadas que marcan el verdadero comienzo de los procesos cognoscitivos;
b) no obstante la gran diferencia *estructural* entre sistemas biológicos y cognoscitivos, ambos sistemas tienen como *fuente común* la adaptación de un organismo biológico al medio que lo rodea, a través de procesos de asimilación y de acomodación que realizan *funciones* similares;
c) tanto la evolución de los sistemas biológicos como la de los sistemas cognoscitivos son ejemplos de una evolución de *sistemas abiertos* que interactúan con el ambiente. En tanto tales, obedecen a *mecanismos* de desarrollo similares, los cuales si

bien poseen particularidades propias de cada dominio, tienen características comunes. Piaget nunca formuló esta tesis en estos términos, pero es nuestra opinión que así expresada se sintetiza el alcance de su teoría.

Ninguna de estas tres aserciones implica negar la especificidad de cada uno de los campos, biológico y cognoscitivo, ni tampoco significa que las "leyes" propias de uno de los campos deben "explicar" el comportamiento observado en el otro dominio.

Otra fuente de incomprensión entre los críticos de la epistemología genética, y que nos concierne en muy alto grado dentro del marco de este libro, reside en el permanente interés manifestado en la obra de Piaget con respecto a las estructuras lógicas. Queremos insistir una vez más sobre el hecho de que, ni el papel central que juegan las estructuras lógicas en la teoría piagetiana, ni la forma particular en que allí se aborda la lógica como disciplina científica, pueden entenderse claramente si no se tiene presente el origen epistemológico del interés de Piaget por la lógica y la matemática. Para él, la investigación psicológica —la psicogénesis de la formación de los conceptos— es un *instrumento* que permite comprender cómo evoluciona el conocimiento. Y la biología juega un papel importante por la simple razón de que el conocimiento aparece en un tipo particular de organismo biológico, del cual no puede disociarse. Piaget formula el problema del origen y del papel que juegan las estructuras lógicas, siempre desde una perspectiva epistemológica. El epistemólogo, no el biólogo, es quien formula las preguntas y provee las respuestas.

2. El problema epistemológico del origen de la lógica, y el papel de la lógica en epistemología

En su teoría de la lógica, Piaget establece dos objetivos que deben distinguirse muy cuidadosamente:

a) explicar cómo el sujeto (un sujeto cognoscente) desarrolla relaciones y estructuras lógicas hasta el nivel de lo que suele llamarse la lógica natural de un adulto normal;
b) mostrar cómo las relaciones y estructuras lógicas juegan el papel fundamental de *instrumentos asimiladores* que permiten al sujeto (una vez más: un sujeto cognoscente) aprehender y organizar sus objetos de conocimiento, y cómo ellas son, por esa misma razón, las condiciones necesarias de *toda* forma de conocimiento.

Los dos procesos se desarrollan conjuntamente e interactúan en la forma expresada por una fórmula bien conocida: el sujeto estruc-

tura al mundo, estructurando sus propios instrumentos de estructuración, es decir: su lógica.

La primera de dichas cuestiones, que consiste en saber cómo se desarrolla la lógica, constituye uno de los problemas epistemológicos más fundamentales: ¿de dónde proviene la necesidad lógica? Este problema ha sido el talón de Aquiles de todas las teorías del conocimiento que han surgido en la historia de la filosofía. Platón y Kant aportaron quizás las respuestas más coherentes (independientemente de su validez), pero es la epistemología genética, apoyada sobre los descubrimientos de la psicología genética, quien por primera vez ha podido tratar el problema dentro del marco de la ciencia y de sus métodos.

Después de haber establecido que las relaciones lógicas no son innatas (o a priori), y que ellas no son tampoco ni un resultado directo de la experiencia, ni recibida de la experiencia por la mediación del lenguaje (tesis del empirismo lógico), la epistemología genética debió mostrar cómo ellas son *construidas* por el niño.

Uno puede enunciar simplemente la solución del problema afirmando que las relaciones lógicas se construyen al mismo tiempo que se va organizando el mundo empírico, y que son parte integrante de dichos procesos de organización. Sin embargo, aun cuando esta formulación no sea errónea, puede resultar altamente tramposa. La expresión tramposa es "al mismo tiempo". Es necesario, por consiguiente, elaborar un poco más esta cuestión.

De una u otra manera, las teorías epistemológicas son tentativas de explicar cómo la interacción entre el sujeto S y el objeto O ($S \leftrightarrow O$) engendra el conocimiento. La teoría piagetiana propone una explicación que hace intervenir un proceso de interacción realmente dialéctico. Dejemos por el momento de lado lo que queremos significar por "explicación" en este contexto. Decir que el conocimiento resulta de una interacción dialéctica $S \leftrightarrow O$ arroja muy poca luz sobre el problema, a menos que explicitemos cómo tiene lugar la interacción, y por qué la calificamos de dialéctica.

Es más fácil comenzar por decir qué es lo que ese enunciado *no* significa. En primer lugar, el enumerado no se refiere a proceso alguno de "acción y reacción" como pueden sugerirlo algunas versiones simplistas del materialismo dialéctico. Tampoco recubre un proceso hegeliano de "afirmación-negación-síntesis". Por otra parte, el proceso $S \leftrightarrow O$ que engendra el conocimiento no tiene ninguna similitud con la producción de agua (H_2O) a partir de H y de O por medio de una chispa, pues se trata de un proceso laborioso y complejo. Finalmente, dicho proceso no puede concebirse como un crecimiento uniforme ya que involucra "momentos" o períodos que cumplen papeles diferentes en el seno del proceso total.

Estos son aspectos bien conocidos de la teoría piagetiana y, sin embargo, son frecuentemente ignorados. Conviene pues insistir sobre este punto. Cuando el sujeto S es confrontado con una cierta

situación *O*, su interacción con *O* involucra una *lectura* de la situación (datos empíricos) por medio de la utilización de los instrumentos (lógicos) de organización que ya han sido construidos en situaciones de experiencias anteriores. A través del uso de tales instrumentos, los datos empíricos se tornan *observables*, es decir, que ellos son interpretados y, de una u otra manera, organizados. Las nuevas situaciones a las cuales el sujeto *S* es confrontado (y que él interpreta) ayudarán a su vez a construir nuevos instrumentos de asimilación, es decir, organizadores y lógicos, que permitirán interpretar otras situaciones.

Reclamamos aquí la indulgencia del lector que conoce bien la obra de Piaget, por habernos demorado en recordar estos elementos de la teoría, pero es indispensable recurrir a ellos para referirnos a los errores de interpretación que encontramos aun en lógicos muy competentes que han formulado críticas a la lógica de Piaget. Se trata de aquellos lógicos que hacen referencia a lo que ellos llaman "el mito de los estadios" en el desarrollo de la lógica en la teoría piagetiana. El "mito" consistiría en la manera de elegir solamente ciertos períodos a los cuales Piaget atribuye una importancia extrema en el desarrollo de las relaciones lógicas, cuando en realidad, hubiera podido distinguir muchas otras etapas de una importancia por lo menos similar. Creemos que en esta crítica los lógicos ignoran el hecho de que es *como epistemólogo* que Piaget distingue los estadios. Intentemos clarificar el sentido de esta posición epistemológica.

3. Estadios piagetianos y autoorganización de los sistemas abiertos

Uno de los principios fundamentales de la epistemología genética establece que el desarrollo del sistema cognoscitivo no es *ni un crecimiento continuo, ni un proceso lineal.* La existencia de estadios es simplemente la expresión de estos dos hechos. Piaget en psicología (quizás también Freud) y Marx en economía política han sido, en este sentido, los iniciadores de lo que hoy constituye una teoría general de sistemas. Claro está que ellos no llegaron a "tematizar" los conceptos que condujeron a las teorías actuales. Hoy sabemos que los sistemas abiertos, es decir, sistemas que intercambian con el medio ambiente materia, energía, información, etc., son sistemas que se autoorganizan. Esto significa que tales sistemas adquieren una estructura interna que se hace estacionaria cuando los flujos de intercambio que representan las interacciones con el medio se tornan estacionarios [1].

[1] Véase, por ejemplo, G. Nicolis e I. Prigogine, *Self organisation in Non-equilibrium Systems*, Nueva York, Wiley, 1977, pág. 41.

La palabra clave es, aquí, "estacionario". Que una estructura sea estacionaria no implica que ella sea estática, ni que esté en condiciones de equilibrio, en el sentido dado a esta última palabra por la termodinámica clásica. Una estructura puede ser estacionaria porque ella existe bajo condiciones de equilibrio, o porque, *lejos del equilibrio, ella es mantenida en su estado estacionario por los intercambios con el medio.* En el primer caso, aplicaremos la denominación de "equilibrio" sin más agregados. En el segundo caso, hablaremos de *equilibrio dinámico* o de *equilibración*, en la interpretación que damos a este concepto forjado por Piaget.

En el caso de un sistema biológico o de un sistema cognoscitivo, y como en toda manifestación de un organismo viviente, estamos alejados de las condiciones de equilibrio. Si en un organismo biológico se interrumpen los intercambios del sistema con el medio, evolucionará hacia el equilibrio. Cesará entonces la actividad de todos los órganos. El equilibrio es, en tal caso, la muerte. Cuando los intercambios con el medio continúan, el organismo permanece alejado de las condiciones de equilibrio.

Los resultados de la psicología genética, y su interpretación por la epistemología genética, nos han enseñado que podemos considerar el sistema cognoscitivo como un sistema abierto cuya dinámica está determinada en gran medida por los intercambios con el medio. Su evolución se caracteriza por períodos de equilibrio dinámico o "condiciones semiestacionarias" (los estadios), seguidos de rupturas de equilibrio (desequilibración) y de reorganizaciones (reequilibración) que conducen al sistema a nuevas condiciones estacionarias (nuevo estadio). Debemos hacer aquí una distinción entre condiciones "estacionarias" y condiciones "estables". Que las condiciones estacionarias *lejos del equilibrio* permanezcan estables significa que el sistema fluctúa con respecto a un valor medio. Estas fluctuaciones son debidas sea a variaciones *internas*, sea a variaciones *externas* del medio. Más allá de un cierto umbral, estas fluctuaciones generan la inestabilidad del sistema: es el punto de ruptura de las condiciones estacionarias (la desequilibración).

Los estadios de la teoría piagetiana del desarrollo cognoscitivo son, por consiguiente, períodos de estabilidad relativa (¡que no están en "equilibrio", ni son estáticos!) que involucran todo tipo de fluctuaciones que surgen de las situaciones cambiantes con las cuales está confrontado permanentemente el sujeto. La transición de un estadio cognoscitivo al siguiente es un ejemplo típico de la inestabilidad de un sistema que no logra ya absorber ciertas perturbaciones (contradicciones internas, incapacidad de resolver ciertos problemas, etc.) y debe por lo tanto reorganizar los intrumentos asimiladores para incorporar nuevas situaciones.

Cada período, o cada estadio, tiene como propio los problemas que el sujeto es capaz de resolver, es decir, las situaciones que es capaz de aprehender. Esta manera de concebir los estadios es

manifiestamente epistemológica. Las consideraciones lógicas vienen en un segundo momento: resolver los problemas, aprehender situaciones, explicar lo que ocurre bajo tales o tales condiciones, todo ello exige recurrir a relaciones lógicas. En cada período el sujeto utiliza relaciones características. No utiliza una única relación lógica, o una sola estructura, sino varias. La línea de construcción de cada estructura sigue un desarrollo muy complejo que le es propio, y las diversas líneas de desarrollo no coinciden. *Los estadios del desarrollo no están determinados por el desarrollo de relaciones lógicas singulares como tales* (¿cuál deberíamos privilegiar?).

Decir que ciertas estructuras características están en acción en cada estadio no significa pues, afirmar que el estadio está *definido* por una cierta estructura lógica. La noción de estadio en Piaget implica la primera aserción, no la segunda. Veamos esquemáticamente cómo están caracterizados los estadios. Dejaremos de lado el período sensoriomotriz para referirnos únicamente a los niveles en los cuales interviene la conceptualización.

4. Estadios cognoscitivos y relaciones lógico-matemáticas

Distinguiremos tres etapas importantes en la evolución de las relaciones lógico-matemáticas. Estas etapas corresponden a los tres estadios clásicos incluidos en la psicología genética con los nombres de "pensamiento preoperatorio", de "operaciones concretas" y de "razonamiento hipotéticodeductivo".

En el marco de un estudio de los mecanismos comunes entre la psicogénesis y la historia de la ciencia, hemos caracterizado recientemente estas etapas por tres formas de relaciones lógico-aritméticas, que denominaremos "intraoperatorias", "interoperatorias" y "transoperatorias".[2] Creemos que estas denominaciones dan una representación más clara que las anteriores de la noción de estadio. Piaget expresó su acuerdo sobre este punto en el siguiente párrafo del libro citado: "Resulta claro que estas tres etapas corresponden a nuestra sucesión 'intra', 'inter' y 'trans' como lo vamos a mostrar con ejemplos concretos antes de entrar en las razones que hacen necesaria tal progresión y que justifican el número de tres (a la manera de las 'tesis', 'antítesis' y 'síntesis' de la dialéctica clásica) en lugar de una distribución en un número cualquiera".[3]

[2] J. Piaget y R. García: *Psychogenèse et histoire des sciences.* París, Flammarion, 1983. Hay traducción española: *Psicogénesis e historia de las ciencias,* México, Siglo XXI, 1983.

[3] *Ibíd*, pág. 198.

4.1.: Relaciones intraoperatorias

Las relaciones *intraoperatorias* hacen referencia únicamente a articulaciones internas. La ausencia de reversibilidad a este nivel implica que las relaciones permanecen aisladas y no se componen en sistemas de transformaciones, y menos aun en estructuras. Estas relaciones pueden ser clasificadas en dos clases principales con poca o ninguna coordinación entre ellas.

a) *Las comparaciones y las correspondencias* elaboradas en la etapa que precede a la constitución de las funciones. Esta clase de relaciones incluye las identidades (que no es en modo alguno una relación simple) al mismo tiempo que las correspondencias que resultan de repeticiones, de similitudes y de equivalencias. También se dan en esta etapa funciones que no impliquen transformaciones y sus invariantes.

b) *Las acciones de transformación* de formas diversas, tales como:

- las colecciones de objetos divididos en subcolecciones (por ejemplo, la división bien conocida de una clase *B* en subclases *A* y *A'*, sin que haya todavía comprensión de la cuantificación propia a la relación de inclusión).
- la seriación de objetos *a*, *b*, *c*, . . . de altura diferente, pero solamente en el caso en que el orden se obtiene por verificaciones empíricas que no entrañan la transitividad.
- los números naturales (pero sin conservación de la cantidad).

4.2. Relaciones interoperatorias

Las relaciones interoperatorias implican la existencia de *operaciones elementales*, que consisten en formar conjuntos, seriaciones, etc. gracias a composiciones entre las operaciones que conducen a las primeras estructuras lógico-aritméticas racionales.

Las coordinaciones entre correspondencias y entre transformaciones, así como principios de conservación aparecen en este nivel. Las propiedades siguientes quedan también establecidas:

- reversibilidad
- recursividad
- transitividad
- conmutabilidad (y su forma lineal: la conmutatividad)
- asociatividad limitada
- reciprocidad

Es necesario explicar ahora la transición de las relaciones intraoperativas a las relaciones interoperativas. En particular hay que aclarar cómo el niño pasa del coordinador "poner juntos" y del coordinador de sucesión, en la etapa intraoperatoria, a las operaciones que aparecen en el período siguiente.

Para dar cuenta de esta transición, la teoría piagetiana asigna un papel central a la conquista de la *conmutabilidad*, pero la elaboración de esta idea es bastante tardía en la teoría.[4] En efecto, el progreso fundamental consiste en comprender que en una transformación, las modificaciones en el "punto de llegada" están ligadas a las modificaciones en el "punto de partida". De allí resultan dos consecuencias importantes: a) las transformaciones directas son coordinadas con las transformaciones inversas y conducen así a las operaciones que rebasan las acciones unidireccionales; b) el niño llega así a concebir *conservaciones*. Señalemos además que las posibilidades de retroacción y de retrospección conducen a las recursividades, transitividades y reciprocidades.

El problema central de este estadio está ligado al hecho de que sus estructuras más características —los agrupamientos— si bien son ya muy consistentes y tienen un alto grado de generalidad, permanecen aún muy pobres y presentan limitaciones importantes. Pero recordemos una vez más que, decir que ellas son características (puesto que constituyen de hecho la única organización estructural en acción dentro de la lógica cualitativa de este período), no significa, sin embargo, que ellas proveen la definición del estadio.

No nos detendremos a analizar en detalle las limitaciones bien conocidas de los agrupamientos. Nos parece útil, sin embargo, recordar los problemas epistemológicos que ellos presentan: ¿por qué tienen tales limitaciones? ¿cómo se logra rebasarlas?

La primera limitación concierne la manera en la cual esta estructura realiza su función (en el sentido biológico y no matemático del término). De hecho, ella consiste en expresar las propiedades cualitativas de ciertos contenidos exógenos. El agrupamiento está, como tal, siempre *subordinado* a contenidos dados, es decir, extralógicos. Esta es la razón de su gran debilidad estructural desde el punto de vista formal, aun cuando sea suficientemente coherente como para que sea formalizable. Por otra parte, la subordinación a un contenido extralógico explica el papel de esta estructura en el nivel psicogenético: ella cubre, en efecto, un largo período que se extiende, en general, de los siete a los once años, durante el cual el sujeto comienza a coordinar lógicamente sus operaciones pero sin ser capaz de rebasar una organización de los contenidos concretos, por la carencia de mecanismos formales hipotéticodeductivos.

[4] B. Inhelder, A. Blanchet, A. Sinclair, y J. Piaget; "Relations entre les conservations d'ensembles d'éléments discrets et celles de quantités continues", *Anneé Psychologique, 75*, 1975, págs. 23-60.

Una segunda limitación característica de los agrupamientos es la inexistencia de composiciones, excepto entre elementos o subconjuntos próximos. En este nivel hay cuantificación, pero restringida a "todos", "algunos" y "ninguno". Combinar dos elementos (o subconjuntos) cualesquiera exige generalizaciones extensionales que no están aún elaboradas por el niño. Además, y en la medida en que las composiciones están subordinadas a contenidos extralógicos, el sujeto no puede vincular *formas*, como tales, y se encuentra, por consiguiente, limitado a las conexiones dependientes de los contenidos.

Una tercera limitación está ligada a las dificultades de concebir las intersecciones de clases. Tales dificultades conducen al sujeto a no tomar inicialmente en consideración sino clases disjuntas, lo cual le obliga, en el caso de las clasificaciones, a proceder por dicotomías.

Finalmente, una limitación mayor es la imposibilidad de deducir las propiedades de un subsistema a partir de las propiedades del sistema total. Esta es la razón fundamental que nos hace considerar el agrupamiento como una estructura débil.

4.3. Relaciones transoperatorias

En cuanto a las *relaciones transoperatorias*, ellas conducen a estructuras lógico-matemáticas de naturaleza claramente algebraica como los grupos, las combinaciones, las proporciones, etc. En el nivel que corresponde a una edad situada generalmente entre los once y doce años, esas estructuras aparecen espontáneamente, pero son solo utilizadas instrumentalmente. Por consiguiente, no están aún "tematizadas", y caracterizan un "saber-hacer" del sujeto que no implica una comprensión de las estructuras como tales. Sin embargo, aun bajo esta simple forma de una utilización que no significa ninguna objetivación reflexiva, estas estructuras aparecen como el resultado de un proceso constructivo que consiste fundamentalmente en aplicar operaciones a las operaciones. Este proceso aparece claramente en los casos siguientes:

a) Las *permutaciones*, que requieren establecer un orden entre diferentes seriaciones posibles. Se obtiene el número total de permutaciones en un conjunto de *n* elementos, por una seriación de *todas* las seriaciones posibles con los *n* elementos.
b) Las *combinaciones*, que son clasificaciones de todas las clasificaciones. Aquí la novedad consiste en que el niño no opera ya con clases disjuntas, sino con clases que incluyen un número creciente de intersecciones.
c) *El conjunto de los subconjuntos,* que surge de la estructura precedente con intervención de la *vicariancia*. El pasaje de una vicariancia a otra implica el pasaje de un sistema de inclu-

sión a otro, como las particiones e intersecciones múltiples que se dan al mismo tiempo. El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado resulta de una generalización de ese proceso.

d) *El grupo INRC*, que incluye a la vez las inversiones y las reciprocidades. Este tipo de grupo aparece (de manera aún instrumental y por cierto todavía no tematizado) cuando dos sistemas diferentes se componen en una totalidad única. Es el caso, por ejemplo, en que un mismo movimiento es referido a dos marcos de referencia (en movimiento relativo) con la coordinación necesaria entre ellos. La lógica proposicional bivalente es *también* un ejemplo de dicho grupo.

Una vez constituida, y tan próxima como permanezca de las acciones corrientes, como la ordenación, la transición de "inter" al "trans" "muestra que una operación no permanece por mucho tiempo inerte y aislada ('intra') sino que constituye tarde o temprano, un núcleo de estructuración en las direcciones 'inter' y 'trans' que se prolongan hasta la construcción de las estructuras propiamente dichas".[5]

5. Diacronía, sincronía y estructuras lógicas

La expresión clave en la cita precedente es "núcleo de estructuración". Las líneas de desarrollo de las estructuraciones que convergen hacia ese núcleo, o que divergen de él, no son coincidentes en su evolución. Una vez más advertimos que se podrían definir los estadios piagetianos por el desarrollo de relaciones lógicas tomadas aisladamente.

Pero para situar los estadios en su verdadera perspectiva, es necesario todavía tomar en consideración otros dos aspectos del problema. El primero podemos extraerlo del texto ya citado: "Estas jerarquías cognoscitivas comportan dos tipos de imbricaciones. Unas son proactivas, por ampliación de los dominios en el curso de los períodos sucesivos de la construcción del conocimiento. Otras son retroactivas, puesto que lo adquirido a un nivel *n* puede enriquecer a posteriori las relaciones ya establecidas en un nivel anterior *n − 1*".[6] Esto nos conduce al segundo punto que deseamos subrayar: "si las cosas son así, parece que podemos concluir que las series *Ia Ir T* (es decir, 'intra', 'inter' y 'trans') no consisten en

[5] Piaget y García, *op. cit.*, págs. 204-205.

[6] *Ibíd*, pág. 208.

simples rebasamientos, puramente lineales, tales como los encontramos en toda sucesión dialéctica elemental, sino que es necesario referirse a un rebasamiento continuo de los instrumentos mismos de rebasamiento, lo cual confiere a los instrumentos cognoscitivos su riqueza y su complejidad particular".[7]

Llegamos aquí al corazón mismo del problema: cada estadio no puede ser simplemente concebido como un *crecimiento* natural a partir del estadio precedente, puesto que consiste en una *reorganización de la totalidad de los instrumentos anteriormente utilizados por el sujeto.* Desde este punto de vista, ¿cómo podríamos considerar la transición en términos de "crecimiento" y buscar, como lo ha sugerido Apostel,[8] un algorritmo de crecimiento *(growth algorithm)* para representar el desarrollo de los marcos conceptuales del niño? Es muy sorprendente constatar cuán persistente es esta idea, aún cuando Piaget haya clarificado este punto hace ya un buen número de años y, a nuestro juicio, de manera bien convincente. En efecto, en su comentario al artículo de Apostel en el volumen XV de los *Estudios de epistemología genética*, Piaget expresa su reserva con respecto a la idea de que se debería poder "deducir a priori lo que sería tal desarrollo, desde su punto de partida más humilde, hasta su estado 'final', y esto por medio de un análisis estructural esencialmente algebraico".[9] Piaget estimaba que "esta vía conduciría eventualmente a ciertas generalizaciones interesantes desde el punto de vista formal (. . .) pero quizás sin significación genética".[10] Por nuestra parte, nos resulta difícil aceptar que el proceso temporal de la construcción laboriosa de un sistema de relaciones por parte de un sujeto real, pudiera ponerse en paralelismo con la reconstrucción racional de los vínculos estrictamente formales entre los componentes del sistema.

Con la acquiescencia del lector, nos detendremos un poco más en este punto. Consideremos un estadio n y su transición a un estadio $n + 1$. Los estadios n y $n + 1$ están ambos caracterizados por un *uso instrumental* de estructuras lógicas que designaremos, respectivamente, con Sn y S_{n+1}. A partir de aquí se presentan dos cuestiones diferentes: a) ¿de qué manera el sistema de relaciones S_n engendra *de hecho*, es decir, en acción, el sistema S_{n+1}?;

[7] *Ibid*, pág. 208.
[8] L. Apostel, "The future of Piagetian logic", *Revue Internationale de Philosophie*, 1982, págs. 142-143, 567-611.
[9] J. Piaget, "Introduction: le problème de la filiation des structures, en L. Apostel, J. B. Grize, S. Papert, J. Piaget. *"La filiation des structures"*, en *Estudes d'Epistémologie génétique*. v. XV, París, P.U.F., 1963, pág. 10.
[10] *Ibid*, pág. 11.

b) ¿cómo el sistema S_n, subsumido en S_{n+1}, está formalmente inserto en S_{n+1}? La respuesta a la primera cuestión exige un estudio *diacrónico* y *empírico* acerca de cómo evoluciona la inteligencia de un sujeto. La respuesta a la segunda cuestión exige un estudio *sincrónico* de las relaciones entre diversas estructuras. El primer estudio pertenece a la epistemología de la lógica; el segundo es un estudio estrictamente lógico.

A partir de aquí, no resulta sorprendente que el análisis lógico permita encontrar un mayor número de etapas posibles entre el *nivel formal* S_n y el *nivel formal* S_{n+1}, que aquellos que puede determinar la epistemología del desarrollo. Esto significa simplemente que la mente del niño o del adolescente no sigue las vías rigurosas del lógico formal: ellos se limitan a construir y utilizar las estructuras. En esto, el niño, tal como lo entiende un epistemólogo no difiere del hombre de ciencia. Los matemáticos "puros" hicieron, por ejemplo, serias objeciones a la función delta de Dirac. Felizmente, él no se preocupó mucho y la siguió utilizando en su versión de la mecánica cuántica. Cuando Schwartz proveyó una teoría que daba una fundamentación precisa a esas funciones, su forma rigurosa de construirla resultó completamente diferente del método de Dirac.

La afirmación recíproca es igualmente cierta: el lógico no puede formalizar todo lo que hace un sujeto en su "pensamiento lógico". Las limitaciones bien conocidas de los formalismos son hoy lugares comunes, pero no parece superfluo recordar que una operación simple como "poner en correspondencia", término a término, dos conjuntos no es completamente formalizable cuando se trata de conjuntos infinitos. Esta consecuencia del teorema de Lowenheim-Skolem,[11] no es sino uno de los numerosos argumentos que tienden a mostrar la imposibilidad de formalizar completamente la intuición. Otras interpretaciones posibles de esos teoremas evitan tales consecuencias, pero al precio de recurrir a "soluciones radicales" que la teoría matemática termina por pagar con un alto precio.[12] En esas interpretaciones el problema no es resuelto sino simplemente desplazado.

La idea de establecer un paralelismo estricto entre la filiación de las estructuras desde un punto de vista psicogenético, y las relaciones internas (¡sincrónicas!) y estáticas de estructuras lógicas de complejidad creciente, toma forma en el proyecto de Apostel, entre otros, que intentan descubrir "una relación estructural de orden

[11] Véase, por ejemplo, John Myhill, "On the ontological significance of the Lowenheim-Skolem theorem", en Copi y Gould, *Contemporary Readings in Logical Theory*, New York, McMillan, 1967.

[12] Véase Hao-Wang, "On denumerable bases of Formal Systems". Th. Skolem y otros: *Mathematical Interpretation of Formal Systems*. Amsterdam, North Holland, 1955.

entre las álgebras, relación que reflejaría parcialmente o totalmente la relación genética de filiación entre los sistemas de los cuales estas álgebras representan las formas operacionales".[13] A esto ya hemos respondido que si bien un análisis puramente teórico permite descubrir un gran número posible de líneas de desarrollo, solo una juiciosa alianza de la investigación psicogenética con un análisis epistemológico permitirá determinar la línea de desarrollo efectivamente seguida (a este respecto, los niños y los adolescentes son muy obstinados). De todas maneras, se trata solamente de una respuesta parcial referida a uno solo de los problemas presentados por las tentativas de construir un "álgebra genética". Hemos también evocado una segunda respuesta referida a las limitaciones de los formalismos, y no nos detendremos más en esto.

Hay, sin embargo, una tercera respuesta posible que a nuestro juicio es mucho más fundamental desde un punto de vista epistemológico. La principal objeción a un álgebra genética proviene de la teoría del desarrollo cognoscitivo en tanto ella está estrechamente ligada a la teoría de la autoorganización de los sistemas abiertos. A riesgo de repetirnos, queremos volver sobre este punto que nos permitirá poner en evidencia una característica importante y frecuentemente ignorada del sistema cognoscitivo en su evolución.

6. Discontinuidad estructural y continuidad funcional

Los aspectos diacrónicos y sincrónicos de la evolución del sistema cognoscitivo están relacionados de una manera específica. Hemos descrito más arriba esta evolución como una sucesión de "estadios", es decir, de estados semiestacionarios que sufren rupturas del equilibrio dinámico que caracteriza cada estadio. Lo propio de cada uno de esos estadios consiste en utilizar ciertos "instrumentos asimiladores" que identifican aquellos problemas susceptibles de ser resueltos por el sujeto, así como el tipo de "explicaciones" que es capaz de proponer frente a ciertas situaciones.

En el caso del desarrollo del pensamiento del niño, los instrumentos asimiladores son, en primer lugar, relaciones lógicas. Sin embargo, la transición de un estadio al subsiguiente no puede ser descrito como una simple "adición" de nuevas relaciones lógicas a aquellas que existían previamente. Cada estadio agrega, seguramente, nuevos elementos pero en el marco de una completa *reorganización* del estadio precedente. Esto significa que el equilibrio dinámico anterior, que había permitido al sistema permanecer en un estado estacionario durante un cierto tiempo, ha sido destruido. La teoría de la transición de un estadio al otro es, ante todo, una teoría de ruptura de estados de equilibrio. Su equivalente en la

[13] L. Apostel y otros, *"Structure et genese"*, en *op. cit.* (nota 9).

teoría física es la *inestabilización* de un estado de equilibrio. Una vez desencadenada la inestabilidad, el sistema se *desorganiza* y puede, bajo ciertas condiciones, acceder a nuevas formas de organización. En lo que concierne al sistema cognoscitivo, la "desequilibración" representa un proceso en el cual se manifiesta la imposibilidad, por parte del sujeto, de resolver ciertos problemas con la ayuda de las estructuras de asimilación anteriormente construidas. El sistema total entra, entonces, en crisis.

Cuando hablamos del "sistema total", corremos el riesgo de ser mal comprendidos, puesto que estamos haciendo referencia solo a los aspectos *estructurales* del sistema cognoscitivo, y no a sus aspectos *funcionales*. Estos mecanismos de elaboración del conocimiento permanecen en acción. Precisamente a través de su aplicación el sujeto será capaz de *reorganizar* su sistema. Esta reorganización implica una neta *discontinuidad* en la transición de un nivel a otro, pero ella es estructural y no funcional. Hay, por consiguiente, continuidad funcional y discontinuidad estructural en el desarrollo cognoscitivo.

De acuerdo con la teoría de la epistemología genética, el proceso de reorganización tiene lugar por medio de la utilización de *instrumentos cognoscitivos* específicos. Uno de ellos, que Piaget, designó como "abstracción reflexiva" juega aquí un papel central. La forma en que ella interviene en el proceso de construcción de nuevas relaciones estructurales previene toda idea de desarrollo o crecimiento continuo. Uno puede, sin duda, preguntar si tal proceso de construcción es una descripción válida del desarrollo cognoscitivo "real". Pero entonces está claro que la cuestión planteada debe formularse en términos psicogenéticos y epistemológicos, y *no estrictamente lógicos*. Una vez más es la epistemología de Piaget lo que aquí está en juego. Ningún argumento de lógica formal podría dar cuenta del problema. La forma en que hoy comprendemos la evolución de los sistemas abiertos bajo condiciones variables del medio ambiente, nos provee de un nuevo y poderoso argumento en favor de la interpretación epistemológica de la reequilibración. Cuando un sistema físico abierto se torna inestable, su evolución ulterior es *esencialmente imprevisible*. El punto que representa el estado inestable sobre la trayectoria seguida por el sistema es, en efecto, un punto de *ramificación*. El sistema puede seguir más de un camino posible. La incertidumbre acerca del *camino preciso* que seguirá un sistema sometido a períodos sucesivos de inestabilidad (desequilibrio) parece ser una característica de *todos* los sistemas abiertos.

Volvamos, finalmente, a una cuestión que hemos dejado en suspenso. Las operaciones lógicas no son construidas ni aisladamente ni todas simultáneamente. La lectura de la primera parte de esta obra muestra claramente que las relaciones lógicas se construyen lentamente como *fragmentos de estructuras*. Estos fragmentos se

coordinan gradualmente hasta la emergencia de nuevas estructuras con una organización interna más coherente. Tal es, por ejemplo, el caso de los agrupamientos, que hemos considerado más arriba. Un niño no llega a dominar los agrupamientos simplemente clasificando u ordenando los objetos. Se requiere una preparación que consiste en elaborar diferentes formas de relaciones lógicas *algunas* de las cuales son ya isomorfas a los conectivos de la lógica proposicional, aun cuando estén todavía lejos de una coordinación en un sistema único. Las coordinaciones se establecen a través de un proceso muy complejo que aún no conocemos en todos sus detalles. En un momento dado, hay una convergencia de fragmentos estructurales en un "núcleo de estructuración". Cada fragmento puede encontrarse en un "nivel de desarrollo" diferente de los otros. Por consiguiente un estadio, repitámoslo una vez más, no está definido por una u otra línea de desarrollo, sino por lo que el niño es capaz de hacer con todos los fragmentos de estructura que ha construido hasta ese momento. La complejidad del proceso en el nivel psicogenético es tal que deja poca esperanza a un proyecto de un álgebra genética.

XI. Lógica extensional y lógica intensional

1. Argumentos en favor de la extensionalidad

Con la tradición inaugurada por los *Principia Mathematica* (aun cuando fuera precedida por Frege y, en cierto modo, por Peirce y Schröder), la lógica formal ha sido predominantemente una lógica extensional. Esta versión de la lógica, así como un cierto número de variaciones sobre ella, han dominado la disciplina durante cerca de medio siglo. Aquéllos de nosotros que hacia mediados del siglo tuvimos que enseñar la "lógica moderna", mostramos a los estudiantes que la lógica aristotélica, no obstante los esfuerzos realizados por cierta filosofía tradicional por salvarla, era incapaz de dar cuenta del razonamiento (un razonamiento *lógico*) exigido por las matemáticas elementales. Esta primera batalla fue fácilmente ganada puesto que podíamos presentar ejemplos simples que indicaban claramente las limitaciones extremas de la lógica "tradicional" aristotélica.

La segunda batalla que hubo que librar —la introducción de la lógica de los valores de verdad— no estuvo exenta de dificultades. Era muy elegante enseñar "el esquema de razonamiento desplegado por las tablas de verdad" [1] en todas sus variedades y de subrayar que la "tabla" de los conectivos lógicos de la "conjunción" y la "disyunción" contenía lo que "realmente queremos decir" cuando afirmamos "y" o cuando decimos "o". Los problemas comenzaban con la "implicación" ($\supset$). Allí encontramos las mismas dificultades que habíamos percibido en nuestros profesores de lógica, en nuestros años de estudiantes. ¿Cómo abordar las paradojas de la "implicación material"? El valor de verdad de $q \supset p$ es verdadero si p

[1] W. V. O. Quine, *Méthodes de logique*, Paris, Colin, 1972, pág. 44. (Primera edición inglesa, 1950).

es verdadero, aun cuando *q* sea falso y "no tenga nada que ver" con *p*. Debíamos, por consiguiente, admitir y *enseñar* que un enunciado del tipo "Si todos los suizos son musulmanes, entonces los franceses son europeos" es un enunciado "aceptable" y, más aun, verdadero. De aquí surge que $p \supset (q \supset p)$ es una tautología. Está claro que nadie habla así en la vida cotidiana, ni aun un "lógico extensional" cuando se dirige a su esposa. Rápidamente aprendimos a convencer a los estudiantes que, no obstante la extraña apariencia de los resultados obtenidos por una definición de "$\supset$" con las tablas de verdad, no había por qué inquietarse. En tal sentido, procedíamos por etapas sucesivas. En primer lugar evitamos emplear la palabra "implicación" a fin de apartar sus connotaciones habituales, reemplazándola por el término "condicional". Luego desviamos el condicional "$\supset$" de su lectura corriente "si . . . entonces . . .". Enseguida evitamos utilizar una tabla de verdad para introducir "$\supset$" y decíamos que "$p \supset q$" era simplemente una abreviatura de $\overline{p \, . \, \overline{q}}$, lo cual permitía utilizar las tablas de verdad "más confiables" de " . " y "($\bar{}$)". Advertíamos entonces a los estudiantes que la razón para no considerar "$\supset$" y "si . . . entonces . . ." como sinónimos era que un verdadero científico no tiene necesidad de recurrir a la última expresión en su trabajo. Un eminente lógico de nuestro tiempo W. V. O. Quine ha descrito esta situación con admirable claridad:

"Comencemos por describir la lógica formal como una fase de la actividad de un individuo hipotético que sea a la vez físico, matemático, y otras cosas. Supongamos ahora que este individuo del cual hemos hecho un retrato un poco cargado se interese por el lenguaje ordinario simplemente como un medio de avanzar en física, en matemáticas y en las otras ciencias; supongamos todavía que él está presto a separarse del lenguaje ordinario cada vez que encuentra el artificio cómodo de un lenguaje extraordinario que sea apropiado a sus necesidades del momento cuando formula y desarrolla su física, su matemática u otra ciencia. Entonces él abandona 'si entonces' en favor de '$\supset$' sin mantener nunca la idea falsa de que son sinónimos; procede a realizar este cambio por la única razón de que los objetivos que exigían el recurso a 'si entonces' en el contexto de su trabajo científico particular eran realizables de manera satisfactoria por el uso diferente de '$\supset$' y otros instrumentos. Realiza este desplazamiento y aun otros con la idea de afinar su trabajo científico, de optimizar sus algoritmos y su comprensión de lo que hace. No se preocupa por el grado de inadecuación de su notación lógica en tanto ella reflejara el lenguaje vernacular por cuanto le sirve a todas las necesidades particulares que en su programa científico dependerían en otras circunstancias de esta parte del lenguaje vernacular. No tiene siquiera necesidad de parafrasear el lenguaje vernacular en su notación lógica, porque ha

aprendido a pensar directamente en ella, o aun (y ésta es la belleza del caso) a dejarla pensar por él".[2]

Hace treinta años las palabras de Quine dieron seguridad a los profesores de lógica; pero aquellos de nosotros que proveníamos de las ciencias empíricas no estuvimos realmente satisfechos. Solo un lógico "puro" (o un matemático) podría "dejar la notación lógica pensar por él". Ninguna física real podría jamás nacer, sino muy parcialmente, de tal forma de "pensar". El sentimiento de incomodidad aún permanecía pero otras dificultades se agregaron: algunas de las consecuencias del uso de la definición de "⊃" por medio de los valores de verdad no corresponden a la construcción efectiva de las teorías científicas. La validez según las tablas de verdad de la fórmula $p \,.\, \bar{p} \supset q$ es el ejemplo más chocante: la fórmula indica en efecto que una vez que se enuncia una contradicción, la lógica se torna trivial, es decir, que cualquier enunciado puede afirmarse a partir de allí.

Tal resultado no es solamente extraño, es simplemente insostenible. En física, por ejemplo, no es cierto que, si una teoría entraña una contradicción cualquier aserción puede ser afirmada dentro de la teoría. Un lógico formal "puro" podría muy bien responder: "pero usted utiliza la expresión si entonces, cuando en realidad estaba de acuerdo en disociar el signo '⊃' de dicha expresión si entonces; su conclusión es, por consiguiente, errónea". Quine habla de todos modos de "físicos, matemáticos y otros (sic)" que solo tienen necesidad de "⊃" en su trabajo científico. "¿Qué sentido debemos entonces acordar a la *validez* de $p \,.\, p \supset q$, cualquiera que sea q?" A propósito de esta "anomalía", Anderson y Belnap se refieren a una observación de Kleene quien señala que en la primera versión de la *Lógica matemática* de Quine, B. Rosser fue capaz de deducir la paradoja de Burali-Forti, pero no la paradoja de Cantor. Esto significa simplemente que Rosser y Kleene aceptan ambos el hecho de que una teoría lógica involucre una contradicción (la de Burali-Forti) pero no implique cualquier otro enunciado (por ejemplo la paradoja de Cantor) y, sin embargo, estamos aquí no en el marco de una teoría física "impura" sino en la teoría lógica en lo que tiene de más puro.

Consideraciones de este género han conducido a ciertos lógicos a poner en tela de juicio la idea de que la lógica de los valores de verdad sea apropiada al trabajo del cientificoteórico. Los esfuerzos para reintroducir las "intenciones" en lógica comenzaron a fin de los años cincuenta, y se desarrollaron hasta hacer nacer una teoría lógica que fuera una clara alternativa a la lógica de los valores de verdad. En la veintena de años que siguieron al artículo de Acker-

[2] W. V. O. Quine, "Mr. Strawson on logical Theory", *Mind*, v. 63, 1953, pág. 443.

mann titulado *Begründung einer Strengen Implikation* (1956),[3] la presentación más completa de estos desarrollos es la de Anderson y Belnap.[4]

2. La lógica de la pertinencia y de la necesidad

Intentaremos aquí dar un breve resumen —y en tanto que tal será necesariamente parcial— de ciertas ideas fundamentales de lo que estos autores llaman en su libro una "lógica de la pertinencia y de la necesidad" (designada de aquí en adelante por LE). Esta presentación tiene solo por objeto mostrar la *convergencia* entre estas ideas y el abordaje que hace Piaget en su lógica. Subrayamos la palabra "convergencia" puesto que nosotros no sostenemos que LE en todas sus variedades posibles presentadas por Anderson y Belnap representen de manera alguna una formalización de la lógica piagetiana. Como lo hemos señalado en el capítulo IX, ni siquiera sabemos qué sentido atribuir a la expresión "formalización de la lógica piagetiana". Dicho esto, la convergencia entre LE y la lógica operatoria (LO) no es una simple coincidencia en la forma de abordar la teoría lógica.

Comencemos por LE. Anderson y Belnap han adherido al grupo de lógicos que quisieran restaurar en todos sus derechos el "si... entonces" en la teoría lógica. Ellos se esforzaron por consiguiente, por poder disponer de un sistema lógico en el cual la significación de la "implicación" y del "condicional" fuera muy próxima de lo que estas palabras significan en el lenguaje ordinario (sin dejar de reconocer que este último está muy lejos de ser consistente y preciso). A tal efecto ellos introdujeron un concepto de "entailment" que cubre la noción de implicación "expresada en locuciones lógicas como 'si... entonces', 'implica', 'entraña', etc., y que respondiera a las frases lógicas señalando una conclusión, tales como 'luego', 'se sigue que', 'a partir de allí', 'por consiguiente' y otras frases similares".[5] El signo "→" es adoptado para designar esta forma de implicación, y se interpreta *"A → B"* como significando *"A entails B"* (*"A* implica *B"*).[6]

[3] W. Ackermann, "Begründung einer Strengen Implikation." *Journal of Symbolic Logic*, v. 21, 1956, págs. 113-128.

[4] A. R. Anderson and L. Belnap, *Entailment, The Logic of Relevance and Necessity*, Princeton, Princeton University Press, 1975.

[5] Anderson y Belnap, *op. cit.*, pág. 5.

[6] En lo que sigue de este texto utilizaremos el término "implicación" para designar el *entailment*, el término "condicional" para designar la implicación material, y la expresión "implicación significante" para designar la implicación entre significaciones en el sentido de Piaget.

Dos condiciones son requeridas para afirmar que "*A* → *B*": la pertinencia y la necesidad. Los autores presentan un "cálculo puro E→ de la implicación" que "representan verdaderamente los conceptos de necesidad y de pertinencia en ciertos sentidos matemáticamente definidos". La "necesidad" requerida por la implicación "*A* → *B*" es más fuerte que la noción de "validez" utilizada en la lógica de los valores de verdad. La "necesidad" corresponde, si se quiere, a una "validez necesaria". Una implicación necesaria exige, por consiguiente, de *A* y de *B* que ellas posean "alguna cosa en común". Ellas no pueden ser enteramente independientes una de otra, como lo era en el caso del condicional. Se exige que *B* sea pertinente con respecto a *A*.

Es importante poner de manifiesto que se puede definir la "pertinencia" independientemente de la "necesidad", en tanto que una definición de la "implicación necesaria" que no incluya la pertinencia no es aceptable si uno busca formalizar la "implicación natural". Por consiguiente, nos referiremos siempre a una "necesidad *cum* pertinencia" cada vez que hablemos de una relación necesaria del tipo "→".

La idea de unir una exigencia de "necesidad" a una relación de este tipo había sido ya propuesta en 1932 por Lewis y condujo al desarrollo de las lógicas modales. A tal efecto, Lewis aplicó un operador monádico "□" a una relación definida por valores de verdad. De esta manera, "*A* → *B*" (significando que *A* implica necesariamente *B*) era interpretada como "□*F*(*AB*)", donde *F*(*AB*) es una relación entre *A* y *B* definida por los valores de verdad. Un operador del género "□" no puede de ninguna manera asegurar la exigencia de una *pertinencia* entre *A* y *B*.[7]

LE deja de lado los operadores modales y sigue otro camino para llegar a una relación de implicación que preserve la "necesidad *cum* pertinencia". La vía elegida consiste en definir "→" sobre la base de un sistema de inferencias aceptables. El punto de partida será un sistema de *deducción natural*, y la inferencia se torna, por consiguiente, el elemento central de la lógica.

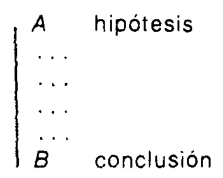
Anderson y Belnap han mostrado de manera convincente que, mediante ligeras modificaciones, el sistema de la deducción natural de Gentzen: a) es "aceptable" en el sentido que provee una representación adecuada del tipo de razonamiento que realmente ocurre en el trabajo científico; b) permite construir un sistema formal que provee los medios de definir "la implicación natural" así como todos los otros conectivos lógicos que deben ser a la vez pertinentes y necesarios.

La construcción propuesta se reduce a afirmar que *A* → *B* si y solamente si exige un camino posible que nos conduce *deductiva*-

[7] Véase la sección, "Relevance is not reductible to modality", por R. K. Meyer, en Anderson y Belnap, *op. cit.*, 29.12, págs. 462-471.

mente de *A* a *B*. Tomado en este sentido, la implicación se torna la conversa de la deducción.

El método está fundado sobre una regla de "introducción de la implicación": podemos afirmar *A* → *B* cada vez que existe una deducción de *B* a partir de *A* o, en otros términos, una prueba de *B* a partir de la hipótesis de *A*. La prueba debería ser un esquema del siguiente tipo:



donde los espacios vacíos deben ser llenados de acuerdo con reglas muy estrictas. Un sistema de deducción natural está de hecho definido por el conjunto de reglas que nos permiten llenar esos espacios vacíos.

Como ejemplo de tal sistema, mencionaremos aquel que Anderson y Belnap denominan FH→, y que encierra las cinco reglas siguientes:[8]

1) "→*I*": si un esquema del tipo precedente es una deducción válida de *B* a partir de *A*, esta deducción entraña *A* → *B*.

2) "→*E*": cada vez que *A* → *B* es afirmada, tenemos derecho a inferir *B* a partir de *A*.

3) "hyp": en el curso de una deducción comenzando por una hipótesis *A*, podemos comenzar una nueva deducción con una nueva hipótesis *B*, esta deducción será entonces una subprueba.

4) "Reit": una etapa deducida de *A* (en el caso de las subpruebas definidas por la regla 3) puede ser repetida bajo la suposición *B*.

Daremos como ejemplo una prueba de la ley de transitividad (las líneas corresponden a las subpruebas).[9]

1)	*A* → *B*	hyp
2)	– *B* → *C*	hyp
3)	*A* → *B*	1 reit
4)	– *A*	hyp
5)	*A* → *B*	*3 reit*
6)	*B*	4,5 →E
7)	*B* → *C*	2 reit
8)	*C*	6,7 →E
9)	*A* → *C*	4,8 →I
10)	(*B* → *C*) → (*A* → *C*)	2,9 →I
11)	(*A* → *B*) → [(*B* → *C*) → (*A* → *C*)]	1,10 →I

[8] *Ibid.*, pág. 9.
[9] *Ibid.*, pág. 9.

La prueba es satisfactoria, pero el sistema como tal no lo es, puesto que da lugar a "pruebas" aun cuando las implicaciones finales no respondan a la exigencia de ser *a la vez* necesarias y pertinentes. Condiciones restrictivas serán, por consiguiente, impuestas a la regla "reit" (reiteración), y tendremos necesidad, por otra parte, de una técnica que permita introducir una A solamente cuando A es pertinente con respecto a B en el sentido en que *A sea utilizada para llegar* a B.

El método consiste en utilizar números como subíndices de fórmulas. Se pueden insertar tantas subpruebas como sea necesario, pero cada una debe comportar un número distinto agregado a sus hipótesis, y las diferentes etapas deben seguir la sucesión de estos números. Se llega así a un sistema que presenta las reglas precitadas bajo una forma revisada.[10]

1) Hyp.: una etapa es introducida como hipótesis de una nueva subprueba, y cada hipótesis nueva recibe una clase unitaria (k) de subíndices numerados, donde k es un nuevo número.
2) Rep.: A_a es repetible y retiene los índices de pertinencia a.
3) Reit: $(A \rightarrow B)_a$ puede ser reiterada y retiene la a.
4) $\rightarrow$E: A a partir de A_a y $(A \rightarrow B)_b$, inferir $B_{a \cup b}$.
5) $\rightarrow$I: A partir de una prueba de B_a de la hipótesis A (k), inferir $(A \rightarrow B)_{a-(k)}$, a condición de que k sea una a.

La aplicación de estas reglas es bastante incómoda pero está probado que tal sistema de deducción natural (que sus autores designan como FE$\rightarrow$) equivale a un cálculo puro de implicación (E$\rightarrow$) fundado sobre las leyes siguientes:[11]

E$\rightarrow$1.	$A \rightarrow B$	(identidad)
E$\rightarrow$2.	$(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)]$	(transitividad)
E$\rightarrow$3.	$(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C)]$	(aserción restringida)
E$\rightarrow$4.	$[(A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C)]$	(autodistribución)

Estos fragmentos de la lógica una vez elaborados permiten proceder por etapas a la construcción de LE. En primer lugar, se agrega la negación a la implicación y se muestra que un cálculo de implicación y de negación es posible independientemente de los otros conectivos de la lógica de los valores de verdad. En segundo lugar, estos últimos son introducidos tomando en consideración las

[10] *Ibíd.*, pág. 23.
[11] *Ibíd.*, pág. 24.

"implicaciones de primer grado", es decir, fórmulas $A \rightarrow B$ donde A y B son valores de verdad de cualquier grado que sea que no comporten implicaciones. Finalmente, todos los fragmentos del sistema son combinados en un cálculo único de implicación (E) que preserva las exigencias de necesidad y de pertinencia y evita por ello las paradojas de la lógica extensional.

La segunda etapa nos interesa muy particularmente. Los autores llaman "implicaciones tautológicas" las implicaciones de primer grado que son válidas. Su preocupación mayor aquí es tener cuenta de la pertinencia del antecedente con respecto al consecuente cuando ambos son puramente definidos por los valores de verdad. Se procede así haciendo referencia al *contenido* del antecedente y del consecuente. Veamos brevemente cómo se aplica tal método.

Tomemos un conjunto finito de variables proposicionales p, q, r . . . Luego introduzcamos las definiciones siguientes:

Atomo: una variable proposicional o su negación (por ejemplo p, $\bar{q}$, $\bar{r}$, . . .).

Conjunción primitiva: una expresión del tipo $A1 . A2 \ldots Am$, donde cada Ai es un átomo.

Disyunción primitiva: una expresión del tipo $B1 \vee B2 \vee \ldots \vee Bn$, donde cada Bj es un átomo.

Implicacion primitiva: una implicación $A \rightarrow B$, donde A es una conjunción primitiva y B una disyunción primitiva.

Implicación de forma normal: una implicación $A \rightarrow B$ de la forma $A1 \vee \ldots \vee AM \rightarrow B1. \ldots .Bm$, donde cada Ai es una conjunción primitiva, y cada Bj es una disyunción primitiva.

Implicacion primitiva explícitamente tautológica: una implicación primitiva $A \rightarrow B$, tal que un átomo (en conjunción) cualquiera de A sea idéntico a un átomo (disjunto) cualquiera de B.

Implicacion explícitamente tautológica de forma normal: una implicación $A1 \vee \ldots \vee Am \rightarrow B1. \ldots .Bn$, donde todo Ai, Bj y $Al \rightarrow Bj$ es explícitamente tautológico.

Las implicaciones de forma normal son consideradas como válidas si y solamente si son explícitamente tautológicas. Para determinar la validez de las implicaciones de primer grado, el procedimiento a seguir consiste en convertirlas primero a la forma normal. Luego se establece la validez por aplicación de las reglas siguientes:

Regla I: $A \rightarrow B$, donde A y B son átomos, es válida si y solamente si A y B son *los mismos* átomos.

Regla II: $A \rightarrow B$, donde A es una conjunción primitiva y B una disyunción primitiva, es válida si y solamente si un átomo cualquiera Ai de A coincide con un átomo cualquiera Bj de B.

Ejemplo:
$p \,.\, q \rightarrow q \vee r$ es válida
$p \rightarrow q \vee p \vee r$ no es válida
$p \,.\, \bar{p} \rightarrow q$ no es válida

Regla III: una implicación $A \rightarrow B$ es válida si existe una forma normal $A1 \vee \ldots \vee AM \rightarrow B1. \ldots .Bn$, tal que para cada par Ai y Bj la implicación $Ai \rightarrow Bj$ es válida según la regla II.

Ejemplos:
$p \,.\, \bar{p} \,.\, q \rightarrow p \,.\, q$ es válida
$(\bar{p} \vee q) \,.\, (\bar{q} \vee r) \rightarrow (\bar{p} \vee r)$ no es válida, puesto que la forma normal
$(\bar{p} \,.\, \bar{q}) \vee (\bar{p} \,.\, r) \vee (q \,.\, \bar{q}) \vee (q \,.\, r) \rightarrow (\bar{p} \vee r)$ no es válida en tanto $q \,.\, \bar{q} \rightarrow \bar{p} \vee r$ no es válida.

Veamos más en detalle cómo las reglas son aplicadas.

a) *Ejemplos de implicaciones válidas;*
   i) $(p \,.\, q) \vee \bar{p} \rightarrow (\bar{p} \vee p) \,.\, (\bar{p} \vee q)$ es válida, puesto que las siguientes implicaciones son válidas:
      $p \,.\, q \rightarrow \bar{p} \vee p$
      $p \,.\, q \rightarrow \bar{p} \vee q$
      $\bar{p} \rightarrow \bar{p} \vee p$
      $\bar{p} \rightarrow \bar{p} \vee q$
   ii) $p \,.\, q \rightarrow q \,.\, (r \vee p)$ es válida, puesto que las implicaciones siguientes son válidas:
      $p \,.\, q \rightarrow q$
      $p \,.\, q \rightarrow r \vee p$

b) *Ejemplos de implicaciones que no son válidas*
   i) $(p \,.\, \bar{p}) \vee q \rightarrow q$ no es válida puesto que
      $q \rightarrow q$ es válida, en cambio
      $p \,.\, \bar{p} \rightarrow q$ no es válida
   ii) $p \rightarrow p \,.\, (q \vee \bar{q})$ no es válida, puesto que
      $p \rightarrow p$ es válida, pero
      $p \rightarrow q \vee \bar{q}$ no es válida

Es importante poner de manifiesto que, como resultado de estas reglas, todas las implicaciones válidas son tautologías, mientras que *no todas las tautologías* del cálculo proposicional extensional (basado solamente en valores de verdad) son válidas. A este respecto, resulta muy instructivo considerar el ejemplo siguiente:

$$\overline{p \,.\, q} \rightarrow (\bar{p} \,.\, q) \vee (p \,.\, \bar{q}) \vee (\bar{p} \,.\, \bar{q})$$

no es válida, aun cuando represente la tabla de valores de verdad

de "V", aplicada a $\bar{p} \vee \bar{q}$ (que es equivalente a $\overline{p \,.\, q}$). Para demostrarlo, es suficiente con reducir a su forma normal la expresión dada, y verificar que cada uno de los átomos del antecedente $\bar{p} \vee \bar{q}$ no implica cada uno de los términos del consecuente.

Sin embargo, la implicación siguiente es válida

$$(\overline{p \,.\, q}) \,.\, (p * q) \rightarrow (\bar{p} \,.\, q) \vee (p \,.\, \bar{q}) \vee (\bar{p} \,.\, \bar{q})$$

donde $p * q$ es la afirmación completa:

$$p * q = \text{df } (p \,.\, q) \vee (\bar{p} \,.\, q) \vee (p \,.\, \bar{q}) \vee (\bar{p} \,.\, \bar{q}).$$

Las implicaciones tautológicas del tipo descrito precedentemente (implicaciones de primer grado) pueden ser formalizadas como sigue,[12]

Implicación:

Regla: a partir de $A \rightarrow B$ y de $B \rightarrow C$, inferir $A \rightarrow C$

Conjunción:

Axiomas: $A \,.\, B \rightarrow A$
$A \,.\, B \rightarrow B$

Reglas: a partir de $A \rightarrow B$ y $A \rightarrow C$, inferir $A \rightarrow B \,.\, C$

Disyunción:

Axiomas: $A \rightarrow A \vee B$
$B \rightarrow A \vee B$

Regla: a partir de $A \rightarrow C$ y $B \rightarrow C$, inferir $A \vee B \rightarrow C$.

Distribución:

Axioma: $A \,.\, (B \vee C) \rightarrow (A \,.\, B) \vee C$

Negación:

Axiomas: $A \rightarrow \bar{\bar{A}}$
$\bar{\bar{A}} \rightarrow A$

Regla: a partir de $A \rightarrow B$, inferir $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$

[12] *Ibíd*, pág. 158.

Esta formalización de las implicaciones tautológicas es sólo un fragmento de un cálculo completo de implicaciones. Su interés reside en utilizar los functores de la lógica de los valores de verdad, pero a través de una relación de implicación intensional que evita las paradojas bien conocidas de las lógicas extensionales.

Es posible construir un sistema que incluya los diversos fragmentos que hemos mencionado. Anderson y Belnap[13] proponen un sistema E con catorce postulados y sólo dos reglas:

→E: dado $A \rightarrow B$, inferir B a partir de A

&I: a partir de A y B, inferir A & B (donde el signo "&" designa la conjunción " . " empleada precedentemente).

Los autores explican de la siguiente manera la necesidad de tener que recurrir a las dos reglas: "El sistema E es concebido de tal manera que englobe dos ramas de la lógica formal que son radicalmente distintas (. . .). En la historia de la lógica, la primera de estas ramas se ha ocupado, en lo que respecta a las implicaciones, de las cuestiones de pertinencia y de necesidad, que desde tiempos remotos han estado en el origen de los estudios de lógica. La segunda, la lógica extensional, es un desarrollo más reciente, al cual creemos que se le ha prestado atención debido al hecho de que la primera es más recalcitrante: la lógica puramente extensional puede ser desarrollada de manera interesante desde el punto de vista matemático, ignorando simplemente los problemas de pertinencia y de necesidad, que fueron los que hicieron surgir la lógica en sus orígenes. Como E cubre ambos territorios, no es sorprendente que sean necesarios dos tipos de reglas: la primera →E, referida a las conexiones entre significaciones consideradas intensionalmente, y la segunda &I, referida a las conexiones entre valores de verdad, donde la pertinencia no está en juego".[14]

Además de combinar las características de las lógicas intensional y extensional, esta manera de construir el formalismo lógico permite introducir otros tipos de functores que tienen ciertas propiedades —pero no todas— de los functores de la lógica de los valores de verdad. Los functores intensionales tienen, por consiguiente, un lugar natural en sistemas lógicos con tanta "legitimidad" como aquellos que están incluidos en los tratados de lógica extensional.

Consideremos la "utilidad" de uno de esos sistemas posibles. Es bien sabido que el silogismo disyuntivo, expresado por la relación entre valores de verdad:

$$A \,.\, (\bar{A} \vee B) \rightarrow B$$

presenta serias dificultades si se pretende que tal implicación represente la forma de razonar en ciencia (y menos aun la forma

[13] *Ibíd*, pág. 232.
[14] *Ibíd*, pág. 234.

"corriente" de razonar). Aceptar el silogismo disyuntivo significaría en particular, aceptar la consecuencia:

$A . \bar{A} \rightarrow B$, para cualquier B

tal consecuencia ha sido rechazada más arriba, en tanto ella no representa la estructura de las teorías científicas. Estas dificultades desaparecen, sin embargo, si en lugar de utilizar un 'V' extensional vinculando enunciados A y B, completamente independientes uno de otro, definimos otro "o" (que representaremos con '$\underline{\vee}$') en forma tal que:

$A . (A \underline{\vee} B) \rightarrow B$

tenga el sentido de:

$(A . (A \rightarrow B)) \rightarrow B$

donde "→" es una implicación intensional. De esta manera la definición de '$\underline{\vee}$' sería:

$A \underline{\vee} B = \text{df } \bar{A} \rightarrow B$

Por otra parte, si aceptamos la ley de Morgan entre la conjunción y la disyunción, tal definición de '$\underline{\vee}$' tiene como contraparte una conjunción intensional (representada por '○') cuya definición sería:

$A \bigcirc B = \overline{\bar{A} \underline{\vee} \bar{B}} = \overline{A \rightarrow \bar{B}}$

Lewis, Goodman y otros han hecho ya referencia a este tipo de functor. Anderson y Belnap lo designan con el nombre de "cotenabilidad". Tal functor tiene ciertas propiedades de la conjunción extensional: conmutatividad, asociatividad y transitividad. Pero no tiene otras de sus propiedades. En particular:

$A \bigcirc B \rightarrow A$ no es válida

Volveremos sobre este punto en la sección siguiente.

La presentación esquemática que hemos hecho de los fragmentos de LE, tomados de la obra de Anderson y Belnap requiere una justificación. Se trata de un método muy rico de construcción de sistemas lógicos, pero tal metodología es puramente formal. Sus autores la presentan como conjuntos de reglas que son, o bien instrumentos ad-hoc para lograr ciertos objetivos, o bien hipótesis de trabajo para ver "a dónde se llega" con tal o cual regla. Creemos sin embargo, que la considerable ductilidad de esa forma de abor-

dar los sistemas lógicos constituye un precioso instrumento para un "epistemólogo genético" que indaga las fuentes de la "lógica natural" de un sujeto que no ha tenido contacto con la teoría.

3. Lógica de la implicación pertinente y necesaria, y lógica de la implicación significante

En la sección precedente hemos hecho ya referencia a una "convergencia" entre LE y la lógica operatoria. Con respecto a esta última, es necesario establecer una distinción entre la versión escrita en el *Essai de logique opératoire*[15] (LO) y la necesaria renovación de algunas de sus partes sobre la base de una lógica de la significación. Dicha "renovación" debería consistir, en primer lugar, en una reescritura de la parte de LO que se refiere a la lógica proposicional, incorporando una lógica de la significación a partir de los datos presentados en este libro. El trabajo no está hecho, pero creemos que el camino a seguir está claramente trazado. La nueva versión que resultara de la fusión de LO y la lógica de la significación la designaremos en adelante como LO'.

La convergencia entre LE y LO (y, a fortiori, LO') tiene que ver con la forma en que se construye la teoría lógica. La lógica de *Principia Mathematica* surgió en una época en que el atomismo lógico dominaba la filosofía de Bertrand Russell. Esta posición filosófica fue en sí misma una expresión del paradigma que dominaba las ciencias físicas a fines del siglo XIX. No es sorprendente, por consiguiente, que se haya tomado como elementos de base de la teoría lógica a las proposiciones elementales y a las combinaciones que de ellas se obtienen por medio de simples "functores" (o "conectivos"), ni que a tales proposiciones elementales se las haya denominado "atómicas" y a sus combinaciones "moleculares". Desde este punto de vista la lógica del *Principia Mathematica* debía necesariamente buscar sus fundamentos en consideraciones puramente lingüísticas. A este respecto, el empirismo lógico fue completamente consistente y no hizo sino enunciar las consecuencias epistemológicas naturales de esta manera de abordar la lógica: para dicha escuela los functores lógicos solo expresaban la estructura interna del lenguaje. Este punto de vista epistemológico tuvo otra consecuencia: la lógica proposicional que resultaba de allí debía de ser extensional. De esta manera, la lógica extensional no es un resultado de una decisión arbitraria de los fundadores de la lógica moderna, sino un desarrollo natural de su posición epistemológica.

Un primer punto de convergencia entre LE y LO' es que ellas se presentan como reacción a esta concepción de la lógica. La forma

[15] J. Piaget; *Essai de logique operatoire, op. cit.*

de reacción es, sin embargo, diferente: la propuesta de construcción de LO' está basada en consideraciones epistemológicas, mientras que la construcción de LE es puramente formal. No obstante esta diferencia, ambas consideran la *inferencia* como *proceso inicial* de la construcción.

Desde el punto de vista de la *epistemología* genética, la lógica comienza desde el momento en que un niño es capaz de anticipar una relación entre acciones (y es la *psicología* genética quien debe determinar dónde y cómo se produce tal anticipación). La anticipación de acciones requiere la presencia de inferencias. Cuando Piaget afirma que "en todos los niveles, tan bajos como sean, todo conocimiento comporta una dimensión inferencial sea ella explícita o muy elemental", está enunciando un aspecto fundamental de su teoría epistemológica. Como hemos insistido ya en el capítulo anterior, se trata de una aserción epistemológica fundada sobre las investigaciones de la psicología genética.

En la perspectiva del desarrollo, la lógica comienza antes que las proposiciones, las relaciones lógicas no están originadas en las relaciones lingüísticas y el cálculo proposicional no puede pretender figurar al comienzo de un libro de lógica, excepto como presentación de un sistema puramente formal.

Toda inferencia adquiere, desde un comienzo, la forma de una relación lógica: la implicación. El presente libro muestra que las implicaciones son primero descubiertas en el nivel de las acciones (una relación entre acciones es, en efecto, una implicación entre acciones), mientras que las implicaciones entre enunciados son mucho más tardías. En ambos casos se trata, sin embargo, de implicaciones significantes en el sentido expuesto en los diversos capítulos de esta obra. La extensionalidad "pura" se encuentra excluida desde el comienzo.

LE procede de manera similar, pero por razones diferentes. La idea directriz es aquí prescindir de la extensionalidad a fin de evitar sus consecuencias embarazosas: las paradojas de la implicación material, las dificultades que presenta la aplicación del silogismo-disyuntivo, etc. Una manera de salir de esas dificultades es partir de inferencias para poder definir las implicaciones aceptables (*entailments*). Pero el trabajo es realizado sobre bases puramente formales, con reglas muy precisas. Si estas reglas parecen un tanto artificiales ...es porque realmente lo son: se trata de reglas *ad hoc* que tienen por único fundamento la obtención de objetivos bien definidos.

Volveremos sobre este punto, pero antes es necesario formular dos observaciones. En primer lugar, la introducción en LE de la relación de implicación a partir de inferencias "aceptables", amplía considerablemente la variedad de functores lógicos susceptibles de ser introducidos ulteriormente y que corresponden a un número importante de implicaciones posibles entre enunciados. Este proce-

dimiento concuerda con lo que se observa en el nivel psicogenético y constituye una característica esencial de LO'.

Una segunda observación, de igual importancia, es que este procedimiento permite introducir functores equivalentes a los del cálculo extensional, sin involucrar las paradojas conocidas involucradas en este último.

Estos rasgos comunes a LE y LO' están ya presentes en LO. Esta afirmación puede parecer errónea a quienes al abrir el *Essai de logique opératoire* advierten que el cálculo proposicional está presente extensionalmente y que la estructura del cálculo se formula con un análisis de las funciones en términos de valores de verdad. Hay allí, sin embargo, una combinación un poco extraña de elementos que pertenecen a la lógica extensional y de elementos no pertinentes a ella. A este respecto no dudamos en afirmar que esta parte de LO, tal como está escrita, no constituye una continuidad natural de los capítulos que la preceden. Creemos, incluso, que tal presentación de la lógica proporcional fue, en su época, una concesión a las presentaciones que seguían la línea de Russell, pero que Piaget nunca estuvo satisfecho con esta solución.

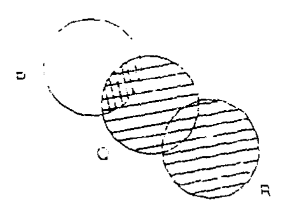
Por nuestra parte, tenemos bien presentes las palabras iniciales de Piaget al comenzar el año en que se realizaron las investigaciones que sirvieron de base a la presente obra, en el Centro Internacional de Epistemología Genética: *il faut nettoyer ma logique* Ellas confirman lo que afirmamos más arriba. La combinación de elementos que entran en la forma en que es tratado el cálculo proposicional en LO muestra que Piaget abordó la lógica extensional con muchas precauciones. Es un hecho que introduce definiciones extensionales de los functores lógicos y que define en particular la relación de implicación a través de una "tabla de verdad". Sin embargo, su *interpretación* de la lógica proposicional fundada sobre la relación de inclusión de clases, está libre de las paradojas de la implicación material. Podríamos ir aun un poco más lejos y considerarla como una interpretación de la implicación en el sentido de LE.

En este contexto, la convergencia entre LE y LO (y a fortiori LO') no es simplemente una coincidencia circunstancial. La interpretación de LO que venimos de proponer provee un sentido claro a las "reglas" de la lógica de la implicación que fueron presentadas en LE solamente como interdicciones ad hoc cuyo objetivo era simplemente llegar a resultados preestablecidos. Si esto no surge como evidencia inmediata en LO, esta interpretación es hoy mucho más clara en LO'.

Las reglas citadas en la sección precedente y que permiten definir una implicación "aceptable" expresan el tipo de relación que busca Piaget cuando habla de "la imbricación de la parte en el todo, o de una parte en sí misma". En el caso de la regla I, la correspondencia es trivial en la medida en que ella no expresa sino

la imbricación de una parte en sí misma".

En el caso de la regla II, es suficiente tomar el ejemplo típico de la forma $P \cdot Q \rightarrow R \vee Q$, cuya interpretación en términos de clases sería:



correspondiente a la imbricación de $P \cap Q$ en $Q \cup R$.

La regla III es simplemente una extensión de la regla II y es reductible a sucesivas aplicaciones de esta última.

En esta interpretación, las reglas de implicación no son ya simplemente reglas ad hoc, sino que adquieren un sentido claro.

Hay un problema que surge cuando se introducen otros functores *a través* de las implicaciones y se intenta analizar la estructura del cálculo proposicional que resulta. Es evidente que se podrían construir numerosos sistemas axiomáticos a partir de la implicación intencional. Anderson y Belnap analizan algunos de los sistemas propuestos en el curso de las dos o tres décadas, que precedieron a su libro. En el estudio sistemático que ellos realizan muestran las relaciones que los vinculan y el tipo de cálculos que producen. Ya hemos evocado dos consecuencias importantes para LO'. En primer lugar, el *entailment* o implicación *intensional* no excluye un cálculo que comporte una interpretación extensional de la negación y de la conjunción. En segundo lugar, existen múltiples cálculos intensionales posibles lo cual plantea la cuestión de saber cómo decidir que un functor sea verdaderamente una "conjunción" o una "disyunción". Anderson y Belnap no aceptan el functor "cotenabilidad" como una conjunción, puesto que no se puede inferir A a partir de $A \bigcirc B$ ($A \bigcirc B \rightarrow A$ no es válida). Por el contrario, nosotros creemos que se podría considerar "○" como la única forma legítima de expresar una *conjunción* entre A y B cuando ambas pertenecen a un sistema en el cual las partes no pueden ser afirmadas independientemente de la totalidad. A este respecto las investigaciones psicogenéticas que conducen a una formulación de la lógica de tipo LO' son sumamente útiles.

Ellas muestran que este tipo de conjunciones es efectivamente utilizado por los sujetos y revelan al complejidad de las situaciones de donde emergen múltiples relaciones lógicas susceptibles de una cierta formalización.

Finalmente, debemos insistir nuevamente sobre la necesidad de una formulación explícita de LO', obra que permanece aún sin realizar.

Conclusiones generales

Este libro ha tenido por objetivo describir ciertas formas elementales que presentan las respuestas de los niños a problemas simples, con el fin de poner en claro las raíces psicogenéticas de las relaciones lógicas que conducen a las operaciones y a sus composiciones en estructuras. Las investigaciones confirman la tesis central de Piaget: desde los niveles más elementales el conocimiento involucra siempre una dimensión inferencial.

¿En qué consiste esta dimensión inferencial? Podemos responder brevemente a esta pregunta diciendo que en los niveles más elementales las inferencias son solamente *implicaciones entre significaciones* (siendo estas últimas *atribuidas* a las propiedades, a los objetos y a las acciones mismas). Para clarificar más esta respuesta y resumir las investigacines referidas en este libro, nos apoyaremos sobre ciertos principios fundamentales de la psicología genética.

1. Las significaciones resultan de una asimilación de los objetos a partir de los *esquemas*, de tal manera que las propiedades no son observables "puros", sino que constituyen siempre una interpretación de los "datos". De acuerdo con la concepción clásica de esquema (un esquema caracteriza lo que es repetible y generalizable en una acción), diremos que la significación de un objeto "es lo que podemos hacer con él". Esta definición no solo es aplicable en el nivel sensoriomotriz, sino también en el nivel preoperatorio, a partir de la función simbólica. La significación es también lo que podemos *decir* de los objetos (en cuyo caso es una descripción) o aun lo que podemos pensar de los objetos (es decir, clasificarlos, relacionarlos de alguna manera, etc.).

En cuanto a las acciones mismas, su significación se define "por lo que se logra con ellas" en función de las transformaciones que

ellas producen en los objetos o en las situaciones. Sea que se trate de predicados, de objetos o de acciones, todas las significaciones implican actividades de un sujeto interactuante con realidades exteriores (físicas), o engendradas internamente, como en el caso de las entidades lógico-matemáticas.

2. Las acciones, sean ellas elementales o de rango superior, no pueden existir, ni funcionar sin vínculos entre ellas. Los esquemas de acción no se dan nunca aislados. Existen diversas formas de relación entre los esquemas y, por consiguiente, de las significaciones que resultan de su aplicación. La relación más general es una relación de implicación.

A este respecto es esencial establecer una distinción clara entre dos aspectos de las relaciones entre acciones: *relaciones causales* y las *relaciones de implicación*. Las primeras están centradas en los objetos y se refieren a los resultados de las acciones, los cuales no son constatables sino a posteriori. Las segundas son relaciones entre significaciones y, en tanto tales, son susceptibles de ser anticipadas.

Hay, de hecho, una progresión o transición entre las acciones materiales y sus coordinaciones (cuyas significaciones son parcialmente puestas de manifiesto cuando los movimientos han sido ejecutados), y las coordinaciones de acciones cuyos resultados pueden ser anticipados. En este último caso, las significaciones se imponen desde el momento en que son anticipadas. En otros términos, la utilización de toda significación supone e involucra la aplicación de ciertas implicaciones.

De aquí resulta que la relación de implicación no se reduce solamente a las implicaciones entre enunciados. Es una relación que surge mucho antes, cuando comienza a darse el pasaje progresivo de las coordinaciones de acciones a las composiciones anticipadas, es decir, inferidas. Aquí comienza la lógica. En efecto, una acción en sí misma no es ni verdadera ni falsa, y no se evalúa sino en términos de eficacia o utilidad con respecto a un objetivo. Por el contrario, la implicación entre acciones, a partir de anticipaciones, es susceptible de verdad o de falsedad y constituye ya una lógica, que aparece en los niveles más primitivos.

Basándonos en las observaciones precedentes, es posible ahora reformular lo que hemos denominado la tesis central del presente libro: existe una lógica de significaciones que precede la lógica formal de los enunciados; dicha lógica de significaciones está fundada sobre implicaciones entre significaciones o, lo que es lo mismo, sobre implicaciones entre acciones.

3. El rasgo más característico de las relaciones lógicas elaboradas por el sujeto, primero en el nivel de las acciones, y luego, en el nivel de los enunciados, es que esta elaboración tiene lugar *apo-*

yándose en cada caso sobre implicaciones significantes. Más precisamente, estas relaciones implícitas o explícitas son, teóricamente (es decir, *desde el punto de vista del observador*) reducibles a combinaciones de implicaciones y de negaciones. Esto equivale a decir que, en todos los niveles, el fundamento de toda lógica es inferencial, lo cual es evidente en toda lógica de significaciones. Es importante, entonces, mostrar el desarrollo correlativo de las inferencias y de las implicaciones.

Las investigaciones del capítulo III muestran la evolución de tres tipos de inferencias que caracterizan tres niveles marcadamente diferentes:

a) Las anticipaciones limitadas a lo que permiten las repeticiones constatables de disposiciones de objetos, o de modificaciones, ya constatadas empíricamente; en este nivel el sujeto no razona o infiere sino con referencia a un universo de objetos empíricos.
b) Las inferencias referentes a ciertas anticipaciones que rebasan lo constatable y están fundadas sobre implicaciones que son necesarias, pero que no exhiben aún sus "razones"; se trata aquí de implicaciones entre acciones que son engendradas por abstracción reflexiva y no se limitan ya a extraer las consecuencias lógicas de abstracciones empíricas.
c) Las inferencias fundadas sobre "razones" o demostraciones posibles.

Por otra parte, hay una evolución correlativa de las implicaciones significantes. Piaget propone una distinción entre formas ó grados de implicaciones significantes que aparecen en tres niveles diferentes:

i) *Implicaciones "locales"*: la significación de las acciones está determinada por sus resultados constatados. Las implicaciones permanecen restringidas a datos limitados y a contextos muy particulares.
ii) *Implicaciones "sistémicas":* las implicaciones de este tipo se insertan ya en un sistema de relaciones pero entendidas solamente por pasos sucesivos entre elementos próximos. En este nivel comienzan los juicios sobre lo que es posible o no lo es. Pero estas inferencias no son suficientes para llegar a las relaciones necesarias. Hay todavía confusión entre necesidad y generalidad.
iii) *Implicaciones "estructurales":* son las implicaciones referentes a las composiciones internas de estructuras ya construidas. En este nivel hay comprensión endógena de la "razón" de los hechos generales observados. Las relaciones generales del nivel II se tornan *necesarias.*

4. Las implicaciones significantes dan también lugar a una tríada que es de naturaleza diferente. En efecto, estas implicaciones entre acciones pueden presentarse bajo tres formas:

a) *Implicaciones proactivas:* que extraen las consecuencias de las proposiciones en juego; consisten en afirmar que si $A \rightarrow B$, las B son consecuencias nuevas derivadas de A.
b) *Implicaciones retroactivas:*[1] ellas se refieren, no a las consecuencias, sino a las condiciones previas, y expresan el hecho de que si $A \rightarrow B$, entonces A es una condición previa de B.
c) *Implicaciones justificantes:* una forma justificante de implicación vincula las formas a) y b) por conexiones necesarias relacionadas con las "razones".

Dicho de otra manera, las implicaciones involucran tres aspectos: un aspecto de *amplificación*, referente a las consecuencias; uno de *condicionamiento*, referente a condiciones previas; y uno de *profundización* que permite poner de manifiesto las razones.

5. Con el surgimiento de la función semiótica, las implicaciones entre acciones son acompañadas por enunciados, dando lugar a la formación de implicaciones significantes entre enunciados. Pero aquí, una vez más, se trata de implicaciones determinadas por las significaciones, sin ser reductibles a relaciones puramente extensionales. Resulta, por consiguiente, natural —y aun indispensable— construir una lógica de significaciones cuya operación central sea la "implicación significante". En esta lógica, hemos adoptado el signo "$\rightarrow$" para designar dicha forma de implicación. Escribiremos entonces $A \rightarrow B$ si una significación s de A está englobada en las de B, y si esta significación s es transitiva. En este caso, los "englobamientos" de significaciones en comprensión corresponden a las imbricaciones en extensión. De allí se accede a los "valores de verdad", pero parciales, que constituyen las imbricaciones. Volveremos sobre este punto.

6. Consideremos ahora otras relaciones entre significaciones que han sido puestas en evidencia por las investigaciones. Debemos mencionar aquí un resultado importante: el hecho de que se asiste en las investigaciones a la formación precoz, en el plano de las acciones, de operaciones que no están reunidas en estructuras de conjunto, pero cada una de las cuales consideradas separadamente en su propio contexto de significaciones, es isomorfa a una de las dieciséis operaciones binarias de la lógica proposicional.

[1] La distinción entre implicaciones proactivas y retroactivas coincide con una distinción hecha por Peirce, que las llamó "predictivas" y "retrodictivas" respectivamente.

Este descubrimiento es importante por cuanto parecería contradecir todo lo que la psicología genética ha afirmado acerca del estadio de las "operaciones formales". Ha sido explícitamente afirmado en psicología genética que las dieciséis operaciones binarias de la lógica proposicional son características de los sistemas que se constituyen solamente hacia los once o doce años. Dos razones importantes han servido de fundamento a esta afirmación clásica. La primera es que solamente a esta edad comienza el pensamiento hipotético deductivo, es decir, la posibilidad de extraer consecuencias necesarias de simples hipótesis, y no exclusivamente de datos constatables, como es el caso en el nivel de las "operaciones concretas" (entre siete y diez años). La segunda razón de esta formación tardía es que entre las dieciséis operaciones binarias de este nivel hipotético-deductivo se establecen relaciones de inversión N y de reciprocidad R que constituyen los llamados "grupos de cuaternalidad" (grupos INRC, donde C es la inversa de R y correlativa de la identidad I) que son *utilizados* por el sujeto en situaciones físicas (como en el caso bien conocido del balancín).

Se podría pensar que el descubrimiento de las dieciséis operaciones binarias en el plano de las coordinaciones entre acciones, es decir, mucho antes de todo pensamiento hipotético-deductivo y, a fortiori, mucho antes del empleo de las estructuras INRC, estaría en contradicción flagrante con la afirmación clásica que hemos mencionado. Pero la situación es completamente diferente: en los niveles precoces, se observa simplemente las dieciséis combinaciones posibles entre *pares de acciones*, pero *sin sistema de conjunto*. Cada combinación se efectúa en función de contextos muy variados.

7. Hay, por consiguiente un largo proceso de *construcción* de relaciones lógicas que los sujetos elaboran en función de las situaciones con las que se ven confrontados. Los functores lógicos reciben así diversas interpretaciones posibles: existen varias formas de "y", de "o", de negación, que difieren "en comprensión". Las experiencias descritas en la primera parte de esta obra tuvieron por objetivo identificar esas diversas formas. Ya hemos hecho referencia, por ejemplo, a las investigaciones que constituyen el capítulo III. Así se muestra claramente la existencia de diversas implicaciones entre acciones, de incompatibilidades, etc. El análisis pone de manifiesto que los niños *utilizan* efectivamente unas once de las dieciséis operaciones binarias. En otros capítulos, el lector podrá apreciar que las experiencias realizadas ponen en evidencia otras combinaciones que incluyen las relaciones restantes.

Se asiste así a la formación precoz de intersecciones, incompatibilidades, etc., utilizadas en el plano de las acciones y no de los enunciados, lo cual muestra una vez más el papel formador general de la lógica de las acciones y de las implicaciones entre acciones,

fuente de implicaciones significantes que van mucho más allá de las implicaciones extensionales.

Lo propio de estas diversas relaciones iniciales es que constituyen, primero cada una aisladamente, luego entre ellas, *fragmentos de estructuras* que se coordinan progresivamente hasta la constitución de "*agrupamientos*" (a partir de los siete u ocho años, en general). Estos bosquejos de estructuración, debidos a la puesta en relación entre significaciones, presentan igualmente el interés de preparar la formación, no solamente de los agrupamientos de las operaciones concretas, sino también de las operaciones más complejas, de la lógica proposicional.

8. Retomemos ahora algunos resultados referidos a los functores lógicos. En el caso de la conjunción, las diversas investigaciones muestran hasta la evidencia que este tipo de relación puede presentarse bajo formas diversas. En primera instancia se encuentran dos formas de conjunciones. Por una parte, el texto hace referencia a las "conjunciones obligadas", en caso en que p es inseparable de q, formando ambos parte de una misma imbricación. Por otra parte, la expresión "conjunción libre" es utilizada cuando no hay necesariamente una vinculación de conjunción entre los dos términos en presencia.

Está claro que esta distinción existe desde los niveles más elementales. Consideremos los casos más simples. Podemos definir la significación de los predicados como el conjunto de las similitudes y diferencias entre una propiedad observada sobre un objeto y los otros predicados simultáneamente registrados o ya conocidos. Los predicados están, por consiguiente, vinculados entre ellos por las preoperaciones de "conjunción" que, según la terminología introducida por Piaget, serán "obligadas" (es decir, necesarias, y por tanto, con implicación mutua, como la presencia de una forma y de un tamaño), o "libres" (y, por tanto, contingentes, como entre una forma y un color). En los sujetos más jóvenes se ha observado una forma intermediaria: en el capítulo IV se habla de "predicados acoplados" vinculados por relaciones de conjunciones "seudoobligadas" (por ejemplo, como si el tamaño del elemento mediano en una seriación se modificara al cambiar de posición). En el texto se proponen distinciones similares con referencia a las diversas formas de disyunción.

En el caso de la negación, es manifiestamente necesario establecer la diferencia entre dos tipos de significación a las cuales ya nos hemos referido. En la lógica extensional, la negación tiene como referencial todo el universo del discurso; pero existen, por otra parte, negaciones que son relativas a las imbricaciones más próximas de un enunciado dado. Por ejemplo, en la implicación extensional clásica $p \supset q \equiv (p \cdot q \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q})$, el enunciado $\bar{p}$ en $\bar{p} \cdot q$ o en $\bar{p} \cdot \bar{q}$ es todo lo que no es p, y no el comple-

mentario de *p* con respecto a *q*. Por el contrario, si la clase *B* contiene *A* y *A'*, *B* menos *A* dará *A'*, y la negación es aquí relativa a la clase imbricante, que es la clase *B* englobando *A* y *A'* (es decir: $A' = \bar{A}$, con respecto a *B*). Piaget introduce aquí la expresión "negación proximal" para hacer referencia a una negación siempre relativa a la imbricación más próxima. La expresión "negación distal" es utilizada si $\bar{p}$ equivale a todo lo que no es *p* en el universo del discurso, e independientemente de las imbricaciones eventuales que estuvieran en juego.

Si se admiten estas distinciones se constata que las operaciones binarias incluyen los dieciséis casos conocidos en el cálculo proposicional extensional clásico, pero son un número superior según las variedades de conjunciones de negaciones y aun de disyunciones efectivamente observadas. Estas variedades de operaciones dependen de los contextos y de los referenciales o, dicho de otra manera, de las imbricaciones consideradas.

9. Otras dos observaciones nos permitirán recapitular los resultados. En primer lugar, resulta manifiesto que no podríamos separar netamente lo que Frege llamó *Sinn* (el sentido) y *Bedeutung* (la denotación). *Sinn* es la significación, *Bedeutung* su extensión. Ambas son inseparables, en tanto son dos aspectos de un mismo proceso, y corresponden esencialmente a las dos direcciones del proceso de asimilación identificadas por Piaget: la asimilación *atributiva* que va de un esquema conocido a un objeto nuevo (o, en otros términos, cuando el objeto nuevo es comprendido a partir de un esquema conocido); y la asimilación *integrativa* que va de un nuevo objeto a un esquema. En el primer caso, la asimilación atributiva enriquece el objeto, que es nuevo, pero sin modificar necesariamente el esquema. En el caso de la asimilación integrativa, el sujeto sabe lo que el nuevo objeto "quiere decir", puesto que la asimilación a un esquema anterior es ya conocida.

Si ponemos estas distinciones en relación con la tesis central del libro, según la cual las raíces psicogenéticas de la lógica se encuentran en las significaciones y sus implicaciones, llegamos a una consecuencia importante. Como ya se ha dicho, un objeto no es otra cosa (en tanto que objeto de conocimiento) que un conjunto de predicados coordinados y su significación consiste en "lo que se puede hacer con él", es decir que corresponde a la asimilación a un esquema de acción (se trate de una acción material o mental). El hecho mismo de que el proceso de asimilación tenga una doble dirección muestra que una lógica de significaciones que precede y prepara una lógica de enunciados, debe seguir la vía de una teoría [lógica *a la vez* intensional y extensional] (que surge de la asimilación integrativa).

La segunda observación concierne a la gran flexibilidad de una teoría lógica que tiene su punto de partida en las inferencias y toma

la relación de implicación significante como relación lógica fundamental. Insistiremos una vez más sobre el hecho de que en las investigaciones expuestas en los capítulos precedentes los functores lógicos presentan "en comprensión" diversas significaciones en función de las conjunciones, disyunciones, incompatibilidades, implicaciones mutuas, etc. que los sujetos elaboran *apoyándose cada vez* sobre implicaciones significantes reducibles a combinaciones de implicaciones y negaciones. Existen, por consiguiente, maneras *concretas* de tratar "formas" de conjunciones y disyunciones correspondientes a los functores de una lógica intensional. Es el caso de la conjunción intensional (la "cotenabilidad" mencionada en el capítulo XI) definida por la expresión

$$p \bigcirc q = \text{df } \overline{p \rightarrow \overline{q}}$$

10. Estamos ahora en condiciones de situar los resultados en el contexto más amplio del *Essai de logique opératoire* (LO). Las investigaciones referidas en la presente obra indican tres direcciones que pueden seguirse para reformular los principios centrales de LO. No es necesario aclarar que cada una de ellas requeriría nuevas investigaciones.

a) El objetivo principal de esta obra ha sido mostrar cómo se prepara la construcción de una lógica de las acciones que sea el sustrato indispensable de la lógica operatoria. Para este fin es necesario analizar más profundamente la naturaleza de las implicaciones significantes y, en particular, aquéllas que consisten en implicaciones entre acciones. El concepto de "implicación entre acciones" es la noción más original introducida en esta obra. Para precisar el análisis de esta forma de implicación es necesario remontar tan atrás como sea posible en la evolución psicogenética, desde las acciones prácticas hasta las inferencias más elementales.
b) El segundo objetivo ha permitido revelar en un nivel muy precoz —el nivel de las acciones— la formación de operaciones, cada una de las cuales, considerada aparte y *relativamente a su contexto de significaciones*, se torna isomorfa a una de las dieciséis operaciones binarias de la lógica proposicional.
c) El tercer objetivo ha sido mostrar que en la evolución de las relaciones lógicas, los functores lógicos están presentes mucho antes que los "estadios operatorios", y que, por otra parte, quizá, como uno de los hechos más fundamentales revelados por las investigaciones, las relaciones lógicas se construyen de manera fragmentaria, por fragmentos que se van componiendo gradualmente hasta llegar a constituir estructuras lógicas.

Para concluir, recordaremos una vez más una tesis central de la epistemología genética que está en el origen mismo de las investigaciones analizadas en el presente libro. El "sujeto del conocimiento", con las normas que elabora incesantemente por sí mismo (sin tener necesidad de filósofos, ni de psicólogos que se las prescriban) no puede ser asido objetivamente ni al comienzo, ni al final, ni en un estadio cualquiera de su historia o de su formación, por cuanto no constituye nunca un sistema acabado. Su verdadera naturaleza es la de ser un sistema con *procesos autoorganizadores*, que son funcionalmente continuos, y en los cuales solo *las vecciones de conjunto* son epistemológicamente decisivas. Todo el problema consiste, por consiguiente en reconstituir esas vecciones, aunque ellas sean inacabadas y accesibles por reconstrucción a posteriori, y no por deducción a priori. Ni la especulación filosófica, ni el puro análisis lógico podrían sustituir dicho método de reconstitución.

